

## ♣ Baccalauréat Amérique du Sud mars 1968 ♣

### SÉRIE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

#### Exercice 1

On considère le nombre complexe  $z = x + iy$  et  $Z$  l'on forme

$$Z = \frac{z^2}{1-z}$$

1. Calculer la partie imaginaire de  $Z$  en fonction de  $x$  et  $y$ .  
 $m$  étant le point image de  $z$ , quel est l'ensemble des points  $m$  pour lesquels  $Z$  est réel?
2. On désigne le module de  $z$  par  $r$ , son argument par  $\theta$ .  
Quels sont le module et l'argument de  $\frac{1}{z^2}$  et de  $\frac{1}{z}$ ?  
Exprimer  $Z$  en fonction de  $r$  et  $\theta$ .  
En déduire l'ensemble des points  $m$  pour lesquels  $\frac{1}{Z}$  est réel.

#### Exercice 2

Résoudre l'équation

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x = 2.$$

#### Exercice 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'origine  $O$ .

$(C)$  est le cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$ .

1. Étant donné un point  $M(x_0; y_0)$  extérieur à  $(C)$ , on appelle  $(C_M)$  le cercle de centre  $M$  orthogonal à  $(C)$ . Indiquer une construction géométrique de  $(C_M)$ .  
Calculer la puissance de  $M$  par rapport au cercle  $(C)$  en fonction de  $x_0, y_0$  et  $R$ .  
Écrire l'équation du cercle  $(C_M)$ .
2. Soit  $(D)$  la polaire d'un point  $P(x_1; y_1)$  par rapport à  $(C_M)$ .  
Indiquer une construction géométrique de  $(D)$ .  
Montrer que l'équation de  $(D)$  est

$$(x_1 - x_0)x + (y_1 - y_0)y - x_0x_1 - y_0y_1 + R^2 = 0.$$

3. On suppose que  $(D)$  a pour équation  $y = R$ .  
Étant donné un point  $P(x_1; y_1)$ , existe-t-il un point  $M(x_0; y_0)$  tel que  $(D)$  soit la polaire de  $P$  par rapport à  $(C_M)$ ?  
Donner une solution géométrique, dont on retrouvera le résultat en utilisant l'équation proposée au 2.

4.  $(D)$  est définie comme au 3.;  $P$  décrit la droite  $y = x + 2R$ . Trouver l'équation de l'ensemble,  $(\Gamma)$ , des points  $M$  tels que  $(D)$  soit la polaire de  $P$  par rapport à  $(C_M)$ .

Représenter graphiquement  $(\Gamma)$ .

Cette courbe coupe  $Ox$  en deux points, d'abscisses  $x'$  et  $x''$  ( $x'' > 0$ ).

Calculer l'aire limitée par  $(\Gamma)$ , l'axe des  $x$  et les points d'abscisses  $x'$  et  $x''$ .

On calculera, au préalable, la dérivée de  $\text{Log } |x + k|$ ,  $k$  étant une constante.