

## ♣ Baccalauréat C Amérique centrale juin 1981 ♣

### EXERCICE 1

4 POINTS

Soit  $f$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par

$$f(x) = x + \frac{1}{2} + \log \frac{x}{x+1}$$

On appelle  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un plan rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . On prendra 2 cm comme unité.

1. Préciser l'ensemble de définition de  $f$ . Démontrer que le point I de coordonnées  $(-\frac{1}{2}; 0)$  est centre de symétrie pour  $\mathcal{C}$ .
2. Étudier les variations de  $f$  et construire la courbe  $\mathcal{C}$ .
3. Calculer en  $\text{cm}^2$  l'aire  $\lambda$  du domaine plan fini limité par la courbe  $\mathcal{C}$ , son asymptote oblique et les droites d'équations respectives  $x = 1$  et  $x = \lambda$ , où  $\lambda$  est un réel supérieur ou égal à 1.

### EXERCICE 2

4 POINTS

$\mathbb{C}$  étant l'ensemble des nombres complexes, on considère la fonction polynôme  $P$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par

$$P(z) = (z^2 + 3z)^2 + (3z + 5)^2.$$

1. Factoriser  $P(z)$  en deux polynômes du second degré à coefficients complexes.
2. Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation

$$z^2 + 3(1+i)z + 5i = 0.$$

En déduire les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation :  $P(z) = 0$ , puis montrer que  $P(z)$  est le produit de deux polynômes du second degré, à coefficients réels.

3. *Application.* Montrer que quel que soit l'entier  $b$  supérieur ou égal à 6, si, dans la base  $b$ , l'entier  $A$  s'écrit  $\overline{130}$ , l'entier  $B$  s'écrit  $\overline{35}$  alors l'entier  $A^2 + B^2$  est le produit de deux nombres entiers dont l'écriture, dans la base  $b$ , est indépendante de  $b$ .

### PROBLÈME

12 POINTS

On considère un plan vectoriel euclidien  $E$  rapporté à une base orthonormée  $B = (\vec{i}, \vec{j})$ . On note  $L(E)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans lui-même,  $GL(E)$  le groupe linéaire de  $E$  et  $H$  l'ensemble des éléments  $v$  de  $E$  vérifiant  $f(\vec{v}) = \alpha \vec{v}$  avec  $f$  élément de  $L(E)$ , et  $\alpha$  réel.

Le noyau de  $f$  est donc noté  $H_{f, 0}$  et  $H_{f, 1}$  est donc l'ensemble des vecteurs invariants par  $f$ .

### Partie A

Soit  $g_0$  l'application linéaire de  $E$  dans  $E$  dont la matrice dans la base  $B$  est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que  $g_0$  est un élément de  $GL(E)$ . Déterminer la matrice dans  $B$  de  $g_0^{-1}$ , application réciproque de  $g_0$ .
2. Soit  $s_0$  la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par le vecteur  $\vec{i} + 2\vec{j}$ .  
Déterminer la matrice de  $s_0$  dans la base  $B$ .
3. On considère l'application linéaire  $s'_0 = g_0 \circ s_0 \circ g_0^{-1}$ . Déterminer la nature et les éléments géométriques de  $s'_0$ .

### Partie B

Dans cette partie du problème,  $g$  désigne un élément de  $GL(E)$ ,  $g^{-1}$  son application réciproque et  $D$  et  $\Delta$  deux droites distinctes de  $E$ .

1. Soit  $s$  la symétrie par rapport à  $D$  parallèlement à  $\Delta$ . On considère l'application linéaire

$$s' = g \circ s \circ g^{-1}.$$

Démontrer que  $s'$  est la symétrie par rapport à  $g(D)$  parallèlement à  $g(\Delta)$ .

Retrouver à l'aide de ces résultats ceux de la question A 3.

2. Soit  $f$  un élément de  $L(E)$ . On considère l'application  $\varphi_g$  de  $L(E)$  dans lui-même qui associe à  $f$  l'application linéaire  $\varphi_g(f) = g \circ f \circ g^{-1}$ .
  - a. Préciser  $\varphi_g(f)$  lorsque  $f$  est une homothétie,
  - b. Démontrer que  $\varphi_g(f)$  est une bijection de  $L(E)$  sur lui-même et que

$$\varphi_g(f)(f_1 \circ f_2) = \varphi_g(f)(f_1) \circ \varphi_g(f)(f_2).$$

- c. Démontrer que, quel que soit le réel  $\alpha$ , et quel que soit l'élément  $f$  de  $L(E)$  :

$$H_{\varphi_g(f), \alpha} = g(H_{f, \alpha}).$$

- d. Déterminer la nature et les éléments remarquables de  $\varphi_g(f)$  lorsque  $f$  est la projection sur  $D$  faite parallèlement à  $\Delta$ .
3. On suppose que  $g$  et  $f$  sont des isométries vectorielles.
  - a. démontrer que  $\varphi_g(f)$  est une isométrie vectorielle.
  - b.  $f$  étant une rotation vectorielle, déterminer  $\varphi_g(f)$  en fonction de  $f$  suivant la nature de  $g$ .

### Partie C

On suppose maintenant que  $E$  est orienté et que la base  $B$  est directe. Soit  $\mathcal{P}$  un plan affine euclidien associé à  $E$  et soit  $\mathcal{R} = (\text{O}; \vec{i}, \vec{j})$  un repère de  $\mathcal{P}$ .

Si  $F$  est une application affine de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{P}$ , on note  $\text{Inv}_F$  l'ensemble des points de  $\mathcal{P}$  invariants par  $F$ .

1. Démontrer que, quelle que soit l'application affine bijective  $G$  de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{P}$  admettant  $G^{-1}$  comme application réciproque

$$\text{Inv}_{G \circ F \circ G^{-1}} = G(\text{Inv}_F).$$

2. On considère la rotation  $r$  de centre  $A(0; 1)$  et dont une mesure de l'angle est  $\frac{\pi}{2}$ .

Soit  $D$  et  $\Delta$  les droites de  $\mathcal{P}$  d'équations respectives  $y = x - 1$  et  $y = 0$  dans le repère  $\mathcal{R}$ .

On appelle  $s_1$  la symétrie par rapport à  $D$  parallèlement à  $\Delta$  et  $s_2$  la symétrie orthogonale par rapport à  $D$ .

Déterminer la nature et les éléments remarquables de  $r \circ s_1 \circ r^{-1}$  et de  $s_2 \circ r \circ s_2$ .