

☞ Baccalauréat C Amérique centrale juin 1988 ☞

EXERCICE 1

4 POINTS

Le plan (P) est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'ensemble (E) des points M de (P) de coordonnées $(x; y)$ vérifiant l'équation

$$(1) \quad 25(x^2 + y^2) = (3x - 16)^2.$$

1. En interprétant géométriquement l'équation (1) démontrer que (E) est une conique de foyer O et de directrice la droite (Δ) d'équation $x = \frac{16}{3}$. Donner la nature et l'excentricité de (E) .

Dans toute la suite de l'exercice, M désigne un point de (E) et θ une détermination de l'angle de vecteurs $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

2. a. Dédire de l'équation (1) une relation du premier degré entre OM et l'abscisse x de M .

b. Démontrer que $OM = \frac{16}{5 + 3 \cos \theta}$.

3. On suppose ici que θ appartient à $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

La droite (OM) coupe (Δ) en I et recoupe (E) en un point M' .

a. Démontrer que $\frac{1}{OM} + \frac{1}{OM'}$ est une constante indépendante de M .

b. Démontrer que $\frac{1}{OM} - \frac{1}{OM'} = \frac{2}{OI}$.

EXERCICE 2

4 POINTS

On considère dans le plan orienté (P) , deux points distincts A et B . Pour tout point M de (P) , on appelle M' l'image de M dans la rotation r_A de centre A , d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et M'' l'image de M dans la rotation r_B de centre B , d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

1. De l'étude de $r_B \circ (r_A)^{-1}$, déduire que pour tout point M de (P) , le milieu de $[M'M'']$ est un point fixe J dont on démontrera qu'il appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

2. Le but de cette question est de déterminer l'ensemble des points M pour lesquels M, M', M'' sont alignés.

- a. Pour tout point M de (P) distinct de A et B , démontrer que

$$(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MM''}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) - \frac{\pi}{2} \text{ modulo } 2\pi.$$

- b. En déduire l'ensemble des points M du plan tels que M, M', M'' soient alignés.

PROBLÈME

12 POINTS

Partie A

On considère la fonction numérique g définie sur $I =]-1 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}.$$

1. a. Démontrer que pour tout t de I on a :

$$g'(t) = -\frac{t^3}{1+t}.$$

- b. En déduire que pour tout t de I on a $|g'(t)| \leq 2|t|^3$.
 c. Par application de l'inégalité des accroissements finis, déduire de ce qui précède que pour tout x de I on a $|g(x)| \leq 2x^4$ [on pourra distinguer deux cas suivant le signe de x].

Partie B

Soit f la fonction numérique définie sur $] -1, +\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

On note (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. En utilisant les encadrements obtenus au A., démontrer que la fonction f est dérivable en zéro et préciser une équation cartésienne de la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe (\mathcal{C}) .
 2. Soit h la fonction numérique définie sur $] -1 ; +\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{-x^2 - 2x}{1+x} + 2\ln(1+x).$$

- a. Étudier le sens de variation de h (on ne demande pas d'étude aux bornes).
 b. Préciser $h(0)$. En déduire le signe de $h(x)$ sur $] -1 ; +\infty[$.
 3. Calculer $f'(x)$ pour x appartenant à $] -1 ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$ et l'exprimer à l'aide de $h(x)$. En déduire le sens de variation de f .
 4. Étudier les limites de f en -1 et $+\infty$.
 5. Construire avec soin la courbe (\mathcal{C}) en précisant ses asymptotes (on prendra 2 cm pour unité).

Partie C

1. a. Démontrer que, pour tout réel t positif ou nul, on a :

$$-t^2 \leq h'(t) \leq 0.$$

- b. Pour tout réel x positif ou nul, en déduire par intégration, un encadrement de $h(x)$ et démontrer que $|f'(x)| \leq \frac{1}{3}$.

2. Soit ϕ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $\phi(x) = f(x) - x$.

De l'étude des variations de ϕ , déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution réelle strictement positive notée a .

Vérifier que $a < 1$.

Partie D

1. On pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n . Montrer par récurrence sur n , en utilisant le sens de variation de f , que cette suite est bien définie et que, pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq u_n \leq 1$.
2. a. Démontrer, en appliquant à f l'inégalité des accroissements finis, que pour tout entier naturel n on a :

$$|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{3} |u_n - a|.$$

En déduire que :

$$|u_n - a| \leq \frac{1}{3^n}.$$

- b. Prouver que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
- c. En déduire, en justifiant, une valeur de n pour laquelle u_n constitue une valeur approchée de a à 10^{-3} près. Préciser cette valeur approchée.