

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Amérique du Nord avril 1975 ∞

EXERCICE 1

Soit  $f$  la fonction numérique de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$x \mapsto e^{-|x|}.$$

1.  $f$  est-elle dérivable sur  $\mathbb{R}$ ?  
Étudier en particulier en 0.
2. Étudier les variations de la fonction et tracer sa courbe représentative dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé.
3.  $a$  étant un nombre réel strictement positif, calculer l'aire de la partie de plan définie par :

$$\begin{cases} -a \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

Cette aire a-t-elle une limite quand  $a$  tend vers  $+\infty$ ?

PROBLÈME

Soit  $P$  un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'axes  $Ox$  et  $Oy$ .

Première partie

1. Construire la courbe  $C$  d'équation

$$9x^2 + 16y^2 = 144.$$

On précisera sa nature, son centre et ses sommets.

2. Soit  $h$  l'application de  $P$  dans  $P$  qui, au point  $M$  de coordonnées  $(x; y)$  fait correspondre le point  $M_1$  de coordonnées :

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = \frac{4}{3}y \end{cases}$$

Soit  $C_1$  la transformée de  $C$  par la transformation  $h$ .

Montrer que  $C_1$  est un cercle de centre  $O$ .

Deuxième partie

1. Soit  $f_1$  une application affine de  $P$  dans  $P$ , bijective et laissant  $C_1$  globalement invariant.  
Démontrer que  $O$  est invariant par  $f_1$ .

2. Soit  $g_1$  une application affine de  $P$  dans  $P$  bijective et laissant  $O$  invariant. On note  $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  la matrice, dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ , et l'application linéaire associée à  $g_1$ .  
Démontrer que, pour que  $g_1$  laisse  $C_1$  globalement invariant il faut et il suffit que l'on ait :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases}$$

3. Soit  $\mathcal{E}_1$  l'ensemble des applications affines de  $P$  dans  $P$ , bijective et laissant  $C_1$  globalement invariant.  
Démontrer que  $\mathcal{E}_1$  est le groupe des isométries laissant  $O$  invariant.

### Troisième partie

On désigne par  $\mathcal{E}$  l'ensemble des applications affines de  $P$  dans  $P$ , bijectives, laissant  $C$  globalement invariant.

1.  $h$  étant l'application définies dans la première partie, 2.), démontrer que, si  $f$  appartient à  $\mathcal{E}$ , alors  $h \circ f \circ h^{-1}$  appartient à  $\mathcal{E}_1$  et que si  $f_1$  appartient à  $\mathcal{E}_1$  alors  $h^{-1} \circ f_1 \circ h$  appartient à  $\mathcal{E}$ .
2. Démontrer que, si  $f$  est élément de  $\mathcal{E}$ ,  $O$  est invariant par  $f$  et la matrice de l'application linéaire associée à  $f$  est de l'un des deux types suivants, où  $\theta$  est un nombre réel

$$\begin{aligned} \text{type (1)} & \begin{pmatrix} \cos \theta & -\frac{4}{3} \sin \theta \\ \frac{3}{4} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ \text{type (2)} & \begin{pmatrix} \cos \theta & \frac{4}{3} \sin \theta \\ \frac{3}{4} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. a. Etudier l'ensemble des points invariants par  $f$  suivant que la matrice de l'application linéaire associée est du type (1) ou du type (2).  
b. Déterminer les applications de  $\mathcal{E}$  qui sont involutives.  
Démontrer que, si une telle application n'est ni l'identité dans  $P$ , ni la symétrie par rapport à l'origine, le vecteur  $\overrightarrow{MM'}$ , où  $M'$  désigne l'image de  $M$ , est élément d'une droite vectorielle du plan vectoriel associé à  $P$ .  
Donner une base de cette droite vectorielle.  
En déduire la nature de ces applications involutives.  
c. Déterminer les applications de  $\mathcal{E}$  qui sont des isométries et préciser leur nature géométrique.