Durée : 4 heures

Baccalauréat C Amérique du Nord juin 1982

EXERCICE 1 **4 points**

Les éléments de l'anneau $\dfrac{\mathbb{Z}}{9\mathbb{Z}}$ sont notés $\dot{0}$, $\dot{1}$, $\dot{2}, \ldots, \dot{8}$. Soit a un élément de $\dfrac{\mathbb{Z}}{9\mathbb{Z}}$.

On définit une application f_a de $\dfrac{\mathbb{Z}}{9\mathbb{Z}}$ dans lui-même par

$$f_a(x) = ax + i.$$

1. Pour quelles valeurs de a l'application f_a est-elle bijective ?
2. On pose dans la suite $a = \dot{5}$ et on note f l'application $f_{\dot{5}}$.

   Résoudre dans $\dfrac{\mathbb{Z}}{9\mathbb{Z}}$ l'équation

$$f(x) = x.$$

3. On définit une suite à valeurs dans $\dfrac{\mathbb{Z}}{9\mathbb{Z}}$ par

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & \dot{3} \\ u_n & = & f\left(u_{n-1}\right). \end{array}\right.$$

   a. Démontrer que pour tout entier naturel n, non nul, on a

$$u_n - \dot{2} = \dot{5}\left(u_{n-1} - 2\right).$$

   b. En déduire u_n en fonction de n.

   Démontrer que la suite u est périodique et déterminer sa période.

   Calculer $u_{1\,982}$.

EXERCICE 2 **4 points**

La fonction numérique f de la variable réelle x est définie par

$$f(x) = \text{Log}\left(\sqrt{x^2 + 4} - x\right).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Montrer que la courbe C représentative de f dans un repère orthonormé du plan admet le point I$(0,\ \text{Log}\,2)$ comme centre de symétrie.
3. Étudier les variations de f et construire la courbe C.

PROBLÈME **12 points**

Partie A

1. Vérifier que

$$3z^3 - z^2 - z - 1 = 3(z-1)(z-\alpha)\left(z-\overline{\alpha}\right)$$

où

$$\alpha = \dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \overline{\alpha} = \dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}$$

2. Calculer $|\alpha|$; α^2.

3. On définit les deux suites *réelles*, a et b telles que pour tout entier naturel n

$$\alpha^n = a_n + \mathrm{i}b_n.$$

Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$|a_n| \leqslant \left|\alpha^n\right|$$

$$|b_n| \leqslant \left|\alpha^n\right|$$

En déduire que les limites des suites a et b sont égales à 0.

Partie B

$\mathscr{E}$ désigne l'ensemble des suites définies sur $\mathbb{N}$ à valeurs réelle. On définit la somme de deux suites u et v, comme la suite $u+v$ de terme général $u_n + v_n$. On définit le produit de la suite u par le réel λ, comme la suite $\lambda.u$ de terme général $\lambda.u_n$.
$\mathscr{E}$ muni de ces opérations est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
$\mathscr{F}$ désigne le sous-ensemble des suites de $\mathscr{E}$ vérifiant la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0 ; 1\} \quad 3u_{n+1} - u_n - u_{n-1} - u_{n-2} = 0.$$

1. Démontrer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$.

2. Démontrer que l'application Φ, de $\mathscr{F}$ sur $\mathbb{R}^3$, qui, à toute suite u de $\mathscr{F}$ fait correspondre le triplet $(u_0,\ u_1,\ u_2)$ de ses trois premiers termes, est un isomorphisme d'espace vectoriel.

3. **a.** Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0 ; 1\} \quad 3\alpha^{n+1} - \alpha^n - \alpha^{n-1} - \alpha^{n-2} = 0.$$

b. En déduire que les suites a et b appartiennent à $\mathscr{F}$.

Soit, d'autre part, la suite réelle c telle que pour tout entier naturel n

$$c_n = 1.$$

c. Montrer que $c \in \mathscr{F}$.

Calculer $\Phi(a)$, $\Phi(b)$, $\Phi(c)$. En déduire que (a, b, c) est une base de $\mathscr{F}$.

4. Soit d la suite de $\mathscr{F}$ définie par le triplet de ses trois premiers termes $\Phi(d) = (0,\ 1,\ 0)$.

Déterminer les coordonnées $(X,\ Y,\ Z)$ de la suite d dans la base $(a,\ b,\ c)$. En déduire la limite de d.

5. Soit d' la suite de $\mathscr{F}$ définie par le triplet $\Phi\left(d'\right) = (0, 0, 1)$. Déterminer les coordonnées $\left(X',\ Y',\ Z'\right)$ de la suite d' dans la base $(a,\ b,\ c)$.

En déduire la limite de d'.

Partie C

Soit un plan affine P et trois points, non alignés, G_0, G_1, G_2 de ce plan. On considère le repère cartésien $\left(G_0\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ où

$$\left\{\begin{array}{lcl}\vec{\imath} & = & \overrightarrow{\mathrm{G}_0\mathrm{G}_1}\\ \vec{\jmath} & = & \overrightarrow{\mathrm{G}_0\mathrm{G}_2}\end{array}\right.$$

On définit une suite de points $(\mathrm{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée des trois premiers points G_0, G_1, G_2 et pour tout naturel n supérieur ou égal à 2, G_{n+1}, isobarycentre des points $\mathrm{G}_n,\ \mathrm{G}_{n-1},\ \mathrm{G}_{n-2}$?

1. Calculer les coordonnées des points G_3, G_4, G_5 dans le repère $\left(G_0\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

2. Soit T l'application affine telle que

$$T(\mathrm{G}_0) = \mathrm{G}_3\ \ ;\ \ T(\mathrm{G}_1) = \mathrm{G}_4\ \ ;\ \ T(\mathrm{G}_2) = \mathrm{G}_5.$$

a. Déterminer le point $T(\mathrm{G}_3)$.

b. Déterminer la matrice dans la base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ de l'endomorphisme associé à l'application affine T.

c. Exprimer en fonction des coordonnées $(x\ ;\ y)$ d'un point M de P, les coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ de son image M' par T.

d. Montrer que T laisse un point invariant I.

3. Pour tout entier naturel n, on note x_n et y_n les coordonnées du point G_n dans le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de $\mathscr{F}$ et qu'elles sont égales aux suites d et d' de la partie B.

Que peut-on conclure pour la suite des points G_n ?