

Baccalauréat S Amérique du Nord juin 2000

EXERCICE 1

5 points

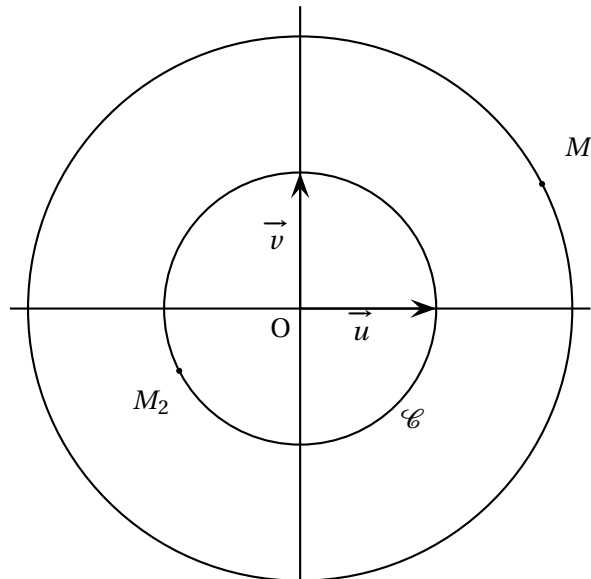
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Dans tout l'exercice, z est un nombre complexe non nul.

À tout point M d'affixe z , on associe le point M' d'affixe $z' = -\frac{1}{z}$, puis le point I milieu du segment $[MM']$. L'affixe de I est donc $\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$.

Note : les questions 2, 3 et 4 sont largement indépendantes.

1. a. Donner une relation entre les modules de z et z' .
Donner une relation entre leurs arguments.
- b. Sur la figure ci-dessous est placé le point M_1 d'affixe z_1 sur le cercle de centre O et de rayon 2.
Expliquer comment on peut obtenir géométriquement le point M'_1 , puis le point I_1 milieu du segment $[M_1M'_1]$. Effectuer cette construction.

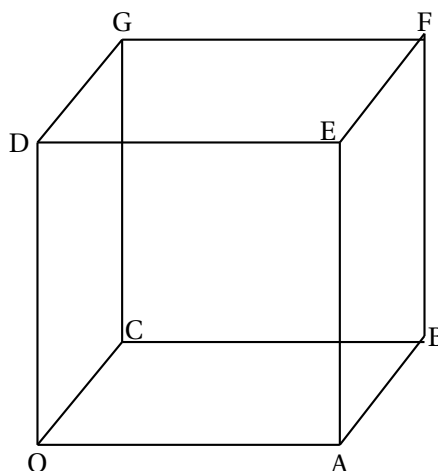


2. Pour cette question, θ est un réel et M est le point d'affixe $z = e^{i\theta}$.
 - a. Calculer sous forme algébrique l'affixe de I .
 - b. Sur la figure jointe est placé le point M_2 d'affixe z_2 sur le cercle \mathcal{C} , de centre O et de rayon 1. Expliquer comment, en utilisant le résultat de la question 2 a, on peut obtenir géométriquement le point I_2 milieu du segment $[M_2M'_2]$.
Effectuer cette construction.
Donner (sans justification) l'ensemble décrit par I lorsque M décrit \mathcal{C} .
3. Dans cette question, M est un point du plan, distinct de O .
 - a. Déterminer les points M du plan complexe pour lesquels M et I sont confondus.

- b. Développer $(z - 2i)^2 + 3$.
Déterminer les points M du plan complexe pour lesquels l'affixe de I est $2i$.
4. Dans cette question, M est un point du plan, distinct de O , d'affixe $z = x + iy$ (x et y réels).
- a. Exprimer en fonction de x et y la partie réelle et la partie imaginaire de l'affixe de I .
- b. Déterminer l'ensemble A des points M du plan pour lesquels I appartient à l'axe des abscisses.
- c. Déterminer l'ensemble B des points M du plan pour lesquels I appartient à l'axe des ordonnées.

EXERCICE 2

5 points

Enseignement obligatoire

Soit le cube OABCDEFG représenté par la figure ci-dessus.

L'espace est orienté par le repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$. On désigne par a un réel strictement positif.

L , M et K sont les points définis par $\overrightarrow{OL} = a\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{OA}$, et $\overrightarrow{BK} = a\overrightarrow{BF}$.

1. a. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DL}$.
b. En déduire l'aire du triangle DLM .
c. Démontrer que la droite (OK) est orthogonale au plan (DLM) .
2. On note H le projeté orthogonal de O (et de K) sur le plan (DLM) .
a. Démontrer que $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OK}$.
b. Les vecteurs \overrightarrow{OH} et \overrightarrow{OK} étant colinéaires, on note λ le réel tel que $\overrightarrow{OH} = \lambda \overrightarrow{OK}$.
Démontrer que $\lambda = \frac{a}{a^2 + 2}$. En déduire que H appartient au segment $[OK]$.
c. Déterminer les coordonnées de H .
d. Exprimer \overrightarrow{HK} en fonction de \overrightarrow{OK} . En déduire que $HK = \frac{a^2 - a + 2}{\sqrt{a^2 + 2}}$.

3. À l'aide des questions précédentes, déterminer le volume du tétraèdre DLMK en fonction de a .

EXERCICE 2

5 points

Enseignement de spécialité

Dans le plan orienté, on considère un triangle direct OAB, rectangle et isocèle en O.

On a donc $(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

On note R_A et R_B les rotations de centres respectifs A et B et de même angle $\frac{\pi}{2}$ et S_O la symétrie de centre O.

On place un point C, non situé sur la droite (AB), on trace les carrés BEDC et ACFG directs.

On a donc $(\vec{BE}, \vec{BC}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $(\vec{AC}, \vec{AG}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

1. **a.** Déterminer $S_{(AO)} \circ S_{(AB)}$ composée des réflexions d'axes (AB) et (AO).
 - b.** En écrivant R_B sous la forme d'une composée de deux réflexions, démontrer que $R_A \circ R_B = S_O$.
2. **a.** Déterminer l'image de E par $R_A \circ R_B$.
 - b.** En déduire que O est le milieu du segment [EG].
 - c.** On note R_F et R_D les rotations de centres respectifs F et D et de même angle. Étudier l'image de C par la transformation $R_F \circ S_O \circ R_D$. Déterminer la transformation $R_F \circ S_O \circ R_D$.
 - d.** Placer H le symétrique de D par rapport à O. Démontrer que $R_F(H) = D$. Démontrer que le triangle FOD est rectangle et isocèle en O.

PROBLÈME

10 points

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) &= \frac{x^2 + x + 1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \text{ pour } x > 0 \\ f(0) &= 0. \end{cases}$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité graphique 5 cm).

Partie A

1. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = 1$ est asymptote à \mathcal{C} .
2. Pour $x > 0$, calculer $\frac{f(x) - f(0)}{x}$. Étudier la limite de cette expression quand x tend vers 0. (on pourra utiliser, pour n entier naturel non nul, $\lim_{u \rightarrow +\infty} u^n e^{-u} = 0$.
Que peut-on en déduire pour la fonction f ? Que peut-on en déduire pour la courbe \mathcal{C} ?
3. Démontrer que pour tout x de $]0, +\infty[$ on a $f'(x) = \frac{1-x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}$.

4. Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau des variations de f .

Partie B

On note g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = f(x) - xf'(x).$$

1. Montrer que dans $]0; +\infty[$, les équations $g(x) = 0$ et $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ sont équivalentes.
2. Démontrer que l'équation $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ admet une seule racine réelle α dont on justifiera un encadrement à 10^{-2} près.
3. On pose $A = \frac{f(\alpha)}{\alpha}$. Encadrer A à 2×10^{-1} près (justifier) et montrer que $A = f'(\alpha)$.
4. Pour tout $a > 0$, on note T_a la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse a . Montrer que T_a a pour équation $y = Ax$. Tracer T_a , puis la courbe \mathcal{C} .
5. Dédire des questions précédentes que de toutes les tangentes T_a à \mathcal{C} (en des points d'abscisses non nulles), seule T_α passe par l'origine O.
6. On admettra que T_α est au-dessus de \mathcal{C} sur $]0; +\infty[$.
 - a. Par lecture graphique (et sans justification), donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$, suivant le réel m donné.
 - b. Par lecture graphique (et sans justification), donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = mx$ selon le réel m donné.

Partie C

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx$.
Sans calculer explicitement u_n , déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$. En déduire que la suite (u_n) est croissante.
2. Démontrer que la fonction h , définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = (x+1)e^{-\frac{1}{x}}$ est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.
3. Calculer u_n . Interpréter graphiquement le résultat.
4. Étudier la convergence de la suite (u_n) .