# Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2000

**EXERCICE 1** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

Un sac contient trois boules numérotées respectivement 0, 1 et 2, indiscernables au toucher.
On tire une boule du sac, on note son numéro $x$ et on la remet dans le sac, puis on tire une seconde boule, on note son numéro $y$ et on la remet dans le sac.
Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.
À chaque tirage de **deux boules**, on associe dans le plan, muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, le point $M$ de coordonnées $(x\,;\,y)$.
On désigne par $D$ le disque de centre O et de rayon 1,7.
Les résultats seront donnés sous forme de **fraction irréductible**.

1. Placer dans le plan muni du repère $(\mathrm{O}\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les points correspondant aux différents résultats possibles.
2. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

   **A** « Le point $M$ est sur l'axe des abscisses » ;

   **B** « Le point $M$ appartient au cercle de centre O et de rayon 1 ».
3. **a.** Soit $X$ la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe la somme $x^2 + y^2$. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$. Calculer son espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$.

   **b.** Montrer que la probabilité de l'évènement « le point $M$ appartient au disque $D$ » est égale à $\dfrac{4}{9}$.
4. On tire 5 fois de suite, de façon indépendante, deux boules successivement et avec remise. On obtient ainsi 5 points du plan.

   Quelle est la probabilité de l'évènement suivant :

   **C** : « Au moins un de ces points appartient au disque $D$ » ?
5. On renouvelle $n$ fois de suite, de façon indépendante, le tirage de deux boules successivement et avec remise. On obtient ainsi $n$ points du plan.

   Déterminer le plus petit entier $n$ strictement positif tel que la probabilité de l'évènement « au moins un de ces points appartient à $D$ » soit supérieure ou égale à 0,999 9.

**EXERCICE 2** **5 points**

**Candidats qui n'ont pas suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$(unité graphique : 2 cm).

1. **a.** Donner l'écriture algébrique du nombre complexe de module 2 et dont un argument est $\dfrac{\pi}{2}$.

   **b.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{i}z - 2 = 4\mathrm{i} - z$. On donnera la solution sous forme algébrique.

2. On désigne par I, A et B les points d'affixes respectives 1, 2i et 3 + i.
   a. Faire une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.
   b. Calculer l'affixe $z_C$ du point C image de A par la symétrie de centre I.
   c. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe $\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$.
   En déduire le module et un argument de ce nombre. ($z_A$ et $z_B$ désignent les affixes des points A et B).
   d. Soit D le point d'affixe $z_D$ tel que $z_D - z_C = z_A - z_B$.
   Montrer que ABCD est un carré.
3. Pour tout point $M$ du plan, on considère le vecteur $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.
   a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{MI}$.
   b. Montrer que le point $K$ défini par $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = 2\overrightarrow{AB}$ est le milieu du segment [AD].
   c. Déterminer l'ensemble $\Gamma$ des points $M$ du plan tels que

$$\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = \left\|2\overrightarrow{AB}\right\|.$$

   Construire $\Gamma$.

**EXERCICE 2** **5 points**

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm). On désigne par $m$ un nombre réel. On considère la transformation $\mathrm{T}_m$ du plan dans lui-même qui, à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ définie par :

$$z' = (m+\mathrm{i})z + m - 1 - \mathrm{i}$$

**Partie A**

1. Peut-on choisir $m$ de telle sorte que $\mathrm{T}_m$ soit une translation ?
2. Déterminer le réel $m$ de telle sorte que $\mathrm{T}_m$ soit une rotation. Préciser alors le centre et l'angle de cette rotation.

**Partie B**

Dans la suite de l'exercice on pose $m = 1$.

1. a. Calculer l'affixe du point $\Omega$ invariant par $\mathrm{T}_m$.
   b. Pour tout nombre complexe $z$ différent de 1, calculer $\dfrac{z'-1}{z-1}$.
   En interprétant géométriquement le module et un argument de $\dfrac{z'-1}{z-1}$, démontrer que $\mathrm{T}_1$ est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.
   c. Démontrer que, pour tout nombre $z$ on a : $z' - z = \mathrm{i}(z-1)$. En déduire que si $M$ est distinct de $\Omega$ , alors le triangle $\Omega MM'$ est rectangle isocèle en $M$.

2. On définit dans le plan une suite $(M_n)$ de points en posant :

$$M_0 = \text{O},\ M_1 = \text{T}_1(M_0),\ \text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul : } M_n = \text{T}_1(M_{n-1}).$$

   **a.** Placer les points $M_1$, $M_2$, $M_3$ et $M_4$ dans le plan muni du repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

   **b.** Pour tout entier naturel $n$, on pose $d_n = \Omega M_n$. Démontrer que la suite $(d_n)$ est une suite géométrique. Converge-t-elle ?

**PROBLÈME** **11 points**

**Partie A étude préliminaire : mise en place d'une inégalité.**

1. Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   On désigne par $\Delta$ la droite d'équation $y = x + 1$ et par $\Gamma$ la courbe d'équation $y = \text{e}^x$.

   **a.** Que représente la droite $\Delta$ pour la courbe $\Gamma$ ?

   **b.** Tracer dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ la droite $\Delta$ et donner l'allure de $\Gamma$.

2. **a.** Démontrer que pour tout réel $t$, $\text{e}^t \geqslant t + 1$. Interpréter graphiquement ce résultat.

   **b.** En déduire que pour tout réel $t$, $\text{e}^{-t} + t + 1 \geqslant 2$, et que pour tout $x$ de $\mathbb{R}_+^*$ on a : $\dfrac{1}{x} + \ln x + 1 \geqslant 2$.

**Partie B étude d'une fonction.**

On considère la fonction $g$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = (x+1)\ln x.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $g$ dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

1. **a.** Étudier le sens de variations de $g$ en utilisant la **partie A**.

   **b.** Déterminer les limites de la fonction $g$ en 0 et en $+\infty$.

2. **a.** Déterminer une équation de la tangente $D$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

   **b.** On appelle $h$ la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $h(x) = g(x) - 2x + 2$.
   Étudier le sens de variations de $h$. On pourra utiliser la question **A 2 b**.
   En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de $x$.

   **c.** étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $D$.

3. Tracer $\mathscr{C}$ et $D$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

4. Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \displaystyle\int_n^{n+1} g(x)\,\text{d}x$.

   **a.** Donner une interprétation géométrique de $U_n$.

   **b.** Montrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul on a :

$$g(n) \leqslant U_n \leqslant g(n+1).$$

**c.** En déduire le sens de variation de la suite $(U_n)$.

**d.** La suite $(U_n)$ est-elle convergente ?

**Partie C étude d'une primitive.**

$G$ désigne la primitive de $g$ sur $]0~;~+\infty[$ qui s'annule en 1.

On a donc : pour tout $x$ appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$, $G(x) = \displaystyle\int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Quel est le signe de $G(x)$ suivant les valeurs de $x$ ?
2. Calculer $G(x)$ à l'aide d'une intégration par parties.
3. Déterminer les limites de $G$ en 0 et en $+\infty$.
   Pour l'étude en $+\infty$, on pourra mettre $x$ en facteur dans l'expression $G(x)$.
   Pour l'étude en 0, on admettra que $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \ln x = 0$.