

∞ Baccalauréat C Amiens–Rouen juin 1983 ∞

EXERCICE 1

Soit f la fonction numérique de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$f(x) = \cos 3x \cdot \cos^3 x.$$

1. Étudier les variations de la fonction f et construire sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (On prendra 3 cm comme unité).
2. Montrer que, quel que soit le réel x , on a :

$$f(x) = a \cos 6x + b \cos 4x + c \cos 2x + d,$$

où a, b, c, d sont quatre réels que l'on déterminera.

3. Calculer, en cm^2 , l'aire de l'ensemble E limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{6}$.

EXERCICE 2

Les suites $(U) = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $V = (V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à termes réels sont définies par :

$$\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_1 = 31 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+2} = 12U_{n+1} - 35U_n \end{cases} \quad \begin{cases} V_0 = -1 \\ V_1 = -11 \\ \forall n \in \mathbb{N}, V_{n+2} = 12V_{n+1} - 35V_n \end{cases}$$

Les suites $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $Y = (Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont alors définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = U_n + V_n \quad \text{et} \quad Y_n = U_n - V_n.$$

1. Calculer X_0 et X_1 .
En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que la suite X est une suite géométrique de raison 5.
2. Montrer de même que la suite Y est une suite géométrique.
3. Calculer X_n et Y_n en fonction de n ; en déduire le calcul de U_n et V_n en fonction de n .
4. Le 3. a montré : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 2 \times 5^n + 3 \times 7^n$.
Soit $n \in \mathbb{N}$; on pose $d_n = \text{P. G. C. D.}(U_n, U_{n+1})$.
Calculer $U_{n+1} - 5U_n$ et $7U_n - U_{n+1}$; utiliser les résultats de ce calcul pour montrer que d_n est égal à 1 ou à 2.
 U_n et U_{n+1} sont-ils premiers entre eux?

PROBLÈME

Soit \mathcal{M} l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Si M et M' appartiennent à \mathcal{M} et si λ est un réel, on note :

- $M + M'$ la somme des matrices M et M' ,
- $M \times M'$ le produit des matrices M et M' ;
- $\lambda \cdot M$ le produit de la matrice M par le réel λ .

On rappelle que $(\mathcal{M}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel et que $(\mathcal{M}, +, \times)$ est un anneau unitaire.

On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Partie A

On désigne par E l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a+b & 3b \\ b & b-a \end{pmatrix},$$

où (a, b) décrit \mathbb{R}^2 .

1. Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel dont (I, J) est une base.
2. Calculer J^2 .
Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.
3. a. Trouver les éléments de E tels que $M^2 = M$.
b. Trouver les éléments de E tels que $M^2 = I$.
4. Montrer que E est l'ensemble des matrices M de \mathcal{M} telles que $M \times J = J \times M$.

Partie B

Soit \mathcal{P} un plan vectoriel de base (\vec{i}, \vec{j}) et les vecteurs $\vec{e}_1 = \vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{e}_2 = 3\vec{i} + \vec{j}$. Pour tout couple (a, b) de réels, on note $\varphi_{a,b}$ l'endomorphisme de \mathcal{P} de matrice

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a+b & 3b \\ b & b-a \end{pmatrix},$$

dans la base (\vec{i}, \vec{j}) .

1. Déterminer les coordonnées dans la base (\vec{i}, \vec{j}) de $\varphi_{a,b}(\vec{e}_1)$ et $\varphi_{a,b}(\vec{e}_2)$; comparer ces deux vecteurs à \vec{e}_1 et \vec{e}_2 respectivement.
2. Déterminer tous les couples (a, b) de réels pour lesquels $\varphi_{a,b}$ est à la fois non nul et non bijectif; donner alors une base de son image et une base de son noyau.
3. Déterminer les couples (a, b) de réels pour lesquels :
 - a. $\varphi_{a,b}$ est une projection sur une droite vectorielle; caractériser cette projection;
 - b. $\varphi_{a,b}$ est une symétrie par rapport à une droite vectorielle; caractériser cette symétrie.

Partie C

Soit P un plan affine associé à \mathcal{P} et rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. On considère l'application affine f d'endomorphisme associé $\varphi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}$ et laissant le point $A(0; 1)$ invariant. Donner la nature de f et ses éléments caractéristiques.
2. Soit g l'application de P dans P qui au point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y + 3 \\ y' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 1 \end{cases}$$

- a. Montrer que g est une application affine de P sans point invariant et dont l'endomorphisme associé est involutif.
 - b. Montrer que g est la composée commutative d'une symétrie affine s et d'une translation t dont le vecteur est colinéaire à \vec{e}_2 . Donner les éléments caractéristiques de s et t .
3. Déterminer les images du plan P par $g \circ f$ et $f \circ g$.

Partie D

Soit h la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$h(x) = -x + \frac{4}{3} \log(3e^x + 1).$$

(log désigne le logarithme népérien.)

1. Montrer que, pour tout x réel, $h(x) = \frac{x}{3} + \frac{4}{3} \log(3 + e^{-x})$.
Étudier les variations de h .
2. Montrer que la courbe \mathcal{C} représentative de h admet deux asymptotes que l'on précisera. La courbe \mathcal{C} coupe-t-elle ses asymptotes?
Tracer \mathcal{C} dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unités : 1 cm).
Tracer la tangente à \mathcal{C} au point B d'abscisse nulle.
3. Construire les transformés des asymptotes à \mathcal{C} , du point B et de la tangente à \mathcal{C} en B par l'application g (définie à la question C. 2.). Utiliser ces résultats pour effectuer sur le graphique un tracé approximatif de l'image de \mathcal{C} par g .