Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Amiens juin 1969 ∾

Exercice 1

Résoudre dans l'ensemble, $\mathbb{R}$, des nombres réels l'équation suivante :

$$6(\ln x)^2 - 19\ln x - 7 = 0.$$

On donnera, pour chaque solution, la valeur exacte, puis la valeur approchée avec l'approximation de la table des logarithmes.

Exercice 2

On considère le nombre complexe $z = 1 = \mathrm{i}\tan\varphi$ où φ est un nombre réel tel que

$$0 < \varphi < \pi \quad \text{et} \quad \varphi \neq \frac{\pi}{2}.$$

Quel est le module et quel est l'argument du nombre complexe $Z = \dfrac{z}{1-z}$.

Si Z_1 et Z_2 sont les valeurs correspondants respectivement à $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{6}$ et $\varphi_2 = \dfrac{5\pi}{6}$, placer dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé les points M_1 et M_2 ayant respectivement pour affixe Z_1 et Z_2.

Problème

On considère un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$; on appelle $x'x$ et $y'y$ les parallèles menées par O respectivement à $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ et (Δ) la droite d'équation $x - y = 0$.

Un point $\mathrm{P}(\alpha~;~\alpha)$ de (Δ) se projette orthogonalement en Q sur $y'y$. On considère les points A et B définis par

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\vec{\imath} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{PB}} = a\cdot\vec{\jmath},$$

a étant un nombre réel donné, strictement positif.

1. La perpendiculaire en Q à la droite BQ coupe la droite PB en N et la perpendiculaire en A à la droite AN coupe la droite PB en M. Calculer en fonction de α et a, les coordonnées x et y, de M et en déduire qu'elles satisfont la relation

$$y = \frac{2x^3 + a^3}{2x^2}.$$

2. On appelle (C_a) la courbe représentative de la fonction f_a qui, à la variable réelle x, fait correspondre

$$f_a(x) = \frac{2x^3 + a^3}{2x^2}.$$

Étudier les variations de f_a.

Tracer la courbe (C_1) correspondant à la valeur 1 du paramètre a. Montrer que (C_a) se déduit de (C_1) par une homothétie de centre O. Quel est, lorsque a varie, l'ensemble des points des courbes (C_a) où la tangente est parallèle à $x'x$?

Dans la suite du problème on suppose $a = 1$.

3. Soit $M\left(x_0\ ;\ y_0\right)$ un point de (C_1) ; la tangente en M à (C_1) recoupe $y'y$ en H, coupe (Δ) en K et recoupe (C_1) en M' ? Montrer que l'on a, quel que soit la position de M sur (C_1), $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{M'H}$ et que le rapport $\dfrac{\overrightarrow{MH}}{\overrightarrow{MK}}$ est une constante, que l'on calculera.

4. Quelle est l'aire de la surface comprise entre (Δ), la courbe (C_1) et les parallèles à $y'y$ d'équations $x = 1$ et $x = b$ $(b > 1)$?

Cette aire admet-elle une limite lorsque b tend vers plus l'infini ?