

∞ Baccalauréat C Amiens juin 1971 ∞

EXERCICE 1

On pose $e^x - e^{-x} = 2s$ (s réel, e base des logarithmes népériens).

1. Exprimer x en fonction de s .
2. Si $s = 3$, calculer x avec la précision permise par les tables de logarithmes. (On prendra $\sqrt{10} \approx 3,162$.)

EXERCICE 2

1. Linéariser $\sin^4 x$.
2. Calculer $f(t) = \int_0^t \left(4 \sin^4 x - \frac{3}{2}\right) dx$.
3. Résoudre l'équation $f(t) = 0$.

PROBLÈME

Partie A

Les nombres réels x et x' sont liés par la relation $xx' = -4$.

Soit N et N' les points d'abscisses respectives x et x' sur un axe $(\vec{\Delta})$.

Calculer en fonction de x la longueur, notée $\ell(x)$, du segment NN' (l'unité de longueur étant celle choisie sur l'axe).

Étudier les variations de la fonction $x \mapsto \ell(x)$ ainsi définie. Tracer son graphe dans un repère orthonormé. Utiliser ce graphe pour discuter l'existence et le nombre des points N tels que la longueur NN' ait une valeur donnée, k .

Partie B

On note (P) le plan complexe et (P^*) le plan complexe privé du point $O(0; 0)$.

À tout point $M \in (P^*)$, image du nombre complexe $z = x + iy$, on associe le point $M' \in (P^*)$, image du nombre complexe $z' = x' + iy'$, tel que $zz' = -4$.

On note $M(z) \xrightarrow{T} M'(z')$ la transformation ainsi définie.

1. T est-elle involutive? Quels sont les points B et B' invariants par T ?
2.
 - a. En étudiant les arguments de z et de z' , montrer que les deux demi-droites OM et OM' sont symétriques par rapport à l'un des axes de coordonnées.
 - b. En complétant cette étude par celle des modules de z et de z' , montrer que T est le produit de deux transformations géométriques simples, que l'on précisera.
3. Calculer les coordonnées x et y du point M en fonction des coordonnées x' et y' du point M' .

4. Écrire, quand il existe, l'équation du cercle (Ω) , de centre donné $\Omega(0 ; \omega)$, orthogonal au cercle de diamètre BB' . Déterminer le transformé par T de ce cercle (Ω) .
 - a. analytiquement,
 - b. géométriquement.
5. Écrire l'équation du cercle (Γ) passant par B et par B' , de centre donné $P(\lambda ; 0)$. Déterminer le transformé par T du cercle (Γ) .
 - a. analytiquement,
 - b. géométriquement.
6. Conclure de ce qui précède que les points B, B', M et M' sont cocycliques et que, lorsque M décrit le cercle (Γ) , la droite MM' passe par un point fixe A , que l'on précisera.
En déduire une construction géométrique du point M' transformé de M par T , lorsque M n'appartient pas à l'axe $y'Oy$.