Durée : 4 heures

Baccalauréat C Aix-Marseille juin 1972

Exercice 1 **5 points**

Soit l'application définie dans $\mathbb{C}$ par

$$z \longmapsto z' = \left(\mathrm{i} - \sqrt{3}\right) z + 3 + \sqrt{3} + \mathrm{i}\left(2\sqrt{3} + 1\right).$$

1. Caractériser géométriquement la transformation qui, à tout point M du plan complexe, d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z'.
2. Le point $M(x~;~y)$ ayant pour homologue la point $M'\left(x'~;~y'\right)$, exprimer x' et y' en fonction de x et de y.
3. Déterminer le transformé de la droite passant par le point $\mathrm{A}\left(1 - 2\sqrt{3}~;~0\right)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{V}\left(\sqrt{3}~;~1\right)$.
   Justifier le résultat obtenu.

Exercice 2 **5 points**

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{\left|x^2 - 1\right|}}{2}.$$

1. **a.** Faire une étude détaillée de f : l'ensemble de définition, la continuité, la dérivabilité, et le tableau de variations.
   b. Déterminer les tangentes à $(\mathcal{C})$ au point A(1 ; 0) et B(-1 ; 0).
   c. Montrer que les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $y_1 = \dfrac{1}{2}x$ et $y_2 = -\dfrac{1}{2}x$ sont asymptotes à $(\mathcal{C})$.
2. **a.** Tracer $(\mathcal{C})$; en déduire l'ensemble, (Γ), des points M dont les coordonnées x et y vérifient la relation

$$4y^2 = \left|x^2 - 1\right|.$$

   b. Montrer que (Γ) est la réunion de deux coniques, dont on précisera la nature.

Problème **10 points**

On considère la fonction numérique f d'une variable réelle définie par

$$f(x) = x \log \frac{2x - 1}{x},$$

où $\log x$ désigne le logarithme népérien de x.
On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un système d'axes orthonormés (l'unité sur chaque axe est 2 cm).

1. **a.** Étudier le domaine de définition.

   b. Calculer les limites de $f(x)$ aux bornes des intervalles du domaine de définition. Pour étudier la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers 0, par valeurs négatives, on pourra poser $-x = u$.

2. Étudier les variations de la fonction dérivée, f' ; en déduire le signe de $f'(x)$.

3. **a.** Démontrer que la droite d'équation $y = x\log 2 - \dfrac{1}{2}$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.

   Pour le calcul de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x\text{Log}\,\frac{2x-1}{x} - x\text{Log}\,2\right)$, on pourra poser $\dfrac{2x-1}{x} = 1+v$.

   b. On considère la fonction numérique g d'une variable réelle définie par $g(x) = \text{Log}\,x - x + 1$.

   Étudier les variations de g ; en déduire que

   $$\forall x \in]0~;~+\infty[,\quad \text{Log}\,x \leqslant x - 1.$$

   Utiliser ce résultat pour démontrer que

   $$\begin{array}{llll} & x\text{Log}\,\dfrac{2x-1}{x} + \dfrac{1}{2} \leqslant 0, & \quad\text{pour} & x > \dfrac{1}{2} \\ \text{et} & x\text{Log}\,\dfrac{2x-1}{x} + \dfrac{1}{2} \geqslant 0, & \quad\text{pour} & x < 0. \end{array}$$

   En déduire la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

4. Donner le tableau de variation et tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

5. Calculer, en utilisant l'intégration par parties, une primitive de $f(x)$.

6. Calculer, en centimètres carrés, avec la précision permise par les tables de logarithmes, l'aire de la surface comprise entre la courbe $(\mathscr{C})$, l'asymptote oblique et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.