

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1975 Amiens ∞

EXERCICE 1

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$z^2 - 2(2+i)z + 6 = 0.$$

Déterminer le module et l'argument de chacune de ses racines.

2. On considère la fonction polynôme P de \mathbb{C} vers \mathbb{C} définie par

$$P(z) = z^3 - (11 + 2i)z^2 + 2(17 + 7i)z - 42.$$

- Montrer l'existence d'un réel r tel que $P(r) = 0$.
- Montrer l'existence d'une fonction polynôme Q telle que

$$(\forall z \in \mathbb{C}) ; P(z) = (z - r)Q(z).$$

c. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $P(z) = 0$.

EXERCICE 2

Soit la fonction f de la variable réelle x définie par

$$\forall x, x \in]-\infty ; 0] \quad f(x) = \frac{x}{x-1},$$

$$\forall x, x \in]0 ; 1[\quad f(x) = x \log x,$$

$$\forall x, x \in]1 ; +\infty[\quad f(x) = -e^{-x} + e^{-1}.$$

- Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 et 1.
- Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé.
- Soit $a \in]0 ; 1[$. Calculer l'aire D_a du domaine délimité par la courbe (C) et les droites ayant pour équations respectives $x = a$, $x = 1$ et $y = 0$.
Cette aire D_a a-t-elle une limite quand a tend vers 0.

PROBLÈME

Soit P le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On appellera \mathcal{P} le plan vectoriel associé à P .

Soit f_λ l'application affine de P dans P laissant O invariant, dont l'application linéaire associée φ_λ a pour matrice, dans la base (\vec{i}, \vec{j})

$$\begin{pmatrix} 0 & 2-\lambda \\ \frac{\lambda+1}{2} & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Partie A

1. Pour quelles valeurs de λ , f_λ est-elle bijective?
2. Déterminer, suivant les valeurs de λ , le noyau de φ_λ noté $\ker \varphi_\lambda$. Lorsque le noyau n'est pas réduit au vecteur nul, en donner une base.
3. Déterminer, suivant les valeurs de λ , l'image de φ_λ notée $\text{Im } \varphi_\lambda$. En donner une base.
4. Pour quelle valeur de λ , f_λ est-elle involutive?
5. Déterminer, suivant les valeurs de λ , l'ensemble des points invariants par f_λ . Lorsque cet ensemble est une droite, préciser cette droite par un point et un vecteur directeur.

Partie B

Étude de f_λ pour $\lambda = -1$

1. Déterminer l'ensemble $U = \{ \vec{u} \in \mathcal{P} \mid \varphi_{-1}(\vec{u}) = \vec{u} \}$.
2. Montrer que les sous-espaces U et $\ker(\varphi_{-1})$ sont supplémentaires dans \mathcal{P} .
3. En déduire que φ_{-1} est la composée de d'une projection vectorielle et d'une homothétie vectorielle, que l'on déterminera.
4. En déduire que f_{-1} est la composée de d'une projection et d'une homothétie.

Partie C

Étude de f_λ pour $\lambda = -1$

1. Déterminer les réels k pour chacun desquels il existe un vecteur \vec{V} non nul vérifiant $\varphi_3(\vec{V}) = k\vec{V}$.
2. Pour chaque réel k déterminé au 1. vérifier que l'ensemble $\{ \vec{u} \in \mathcal{P} \mid \varphi_3(\vec{u}) = \vec{u} \}$ est une droite vectorielle.
3. En désignant par k_1 et k_2 les deux réels trouvés en C 1. ($k_1 < k_2$), montrer que qu'il existe une base (\vec{V}_1, \vec{V}_2) de \mathcal{P} telle que

$$\forall i \in \{1, 2\}, \varphi_3(\vec{V}_i) = k_i \vec{V}_i.$$

4. Montrer que tout point $M' = f_3(M)$ est obtenu en construisant la projection m de M sur la droite passant par O de vecteur directeur \vec{V}_1 suivant la direction donnée par \vec{V}_2 , puis en construisant M' tel que $\overrightarrow{mM'} = 2\overrightarrow{mM}$. Faire une figure avec un point M , sa projection m et le point M' .

Partie D

Étude de f_λ pour $\lambda = 0$

1. Montrer que f_0 est une symétrie par rapport à une droite relativement à une direction que l'on précisera.

2. Soit le cercle (C) de centre $\Omega(0 ; -2)$ de rayon 1.
- a. Donner une équation de ce cercle dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
 - b. Soit (E) l'image de (C) par f_0 . Déterminer une équation de (E) dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
 - c. Montrer que (E) est une ellipse dont on donnera les coordonnées du centre, le demi-grand axe et le demi-petit axe.
 - d. Faire une figure.