

## ∞ Baccalauréat C Amiens juin 1977 ∞

### EXERCICE 1

3 POINTS

1. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $n^3 - n$  est divisible par 6.
2. Déterminer les entiers naturels  $n$  tels que  $n^2 - n$  soit divisible par 6.
3. Déterminer les entiers relatifs  $x$  et  $y$  tels que  $3x + y - 1$  et  $x - y - 3$  soient tous deux divisibles par 6.

### EXERCICE 2

5 POINTS

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien réel de dimension 3,  $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  une base orthonormée de  $E$ . On considère les applications linéaires  $f_i$  ( $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ) de  $E$  dans  $E$  définies par :

$$\begin{array}{lll} f_1(\vec{e}_1) = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3 & ; & f_1(\vec{e}_2) = \vec{e}_3 & ; & f_1(\vec{e}_3) = \vec{0} \\ f_2(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 & ; & f_2(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2 & ; & f_2(\vec{e}_3) = \vec{e}_3 \\ f_3(\vec{e}_1) = -\vec{e}_1 & ; & f_3(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2 & ; & f_3(\vec{e}_3) = -\vec{e}_3 \\ f_4(\vec{e}_1) = \vec{e}_2 & ; & f_4(\vec{e}_2) = \vec{e}_3 & ; & f_4(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 \end{array}$$

1. Indiquer, pour chaque application  $f_i$  en justifiant votre affirmation, s'il s'agit ou non d'un endomorphisme orthogonal.
2. Pour chaque endomorphisme orthogonal  $f_i$  : préciser l'ensemble  $F_i$  des vecteurs de  $E$  invariants par  $f_i$ , la nature de  $f_i$  ainsi que le nombre minimum de symétries vectorielles orthogonales par rapport à un plan vectoriel en lesquelles on peut décomposer  $f_i$ .  
Indiquer si une telle application  $f_i$  est un endomorphisme orthogonal positif ou négatif.

### PROBLÈME

12 POINTS

#### Partie A

$P$  est un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé  $R = (O; \vec{i}, \vec{j})$ .  
(Pour les figures, on représentera l'unité par 4 centimètres).

1. Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x \operatorname{Log}|x| & \forall x \in \mathbb{R}^* \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Etudier  $f$  (en particulier la continuité et la dérivabilité).

Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans le repère  $R$ ; montrer que  $\mathcal{C}$  admet une tangente en 0 que l'on précisera. Construire  $\mathcal{C}$  dans le repère  $R$ .

2. a. On pose  $F(x) = \int_1^x f(t) dt$  (1)

Justifier le fait que  $F(x)$  a un sens pour tout  $x$  réel.

L'égalité (1) définit donc une application  $F$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

b. À l'aide d'une intégration par parties, calculer  $\int_1^x t \operatorname{Log} t dt$  pour  $x$  strictement positif.

3. a. Soit  $\varphi$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\begin{cases} \varphi(x) &= \frac{x^2}{2} \operatorname{Log}|x| - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \\ \varphi(0) &= \frac{1}{4} \end{cases}$$

Montrer que  $\varphi$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Quelle est la fonction  $\varphi'$  dérivée de  $\varphi$ ? Justifier le fait que  $\varphi = F$ .

b. Construire la courbe  $\Gamma$  représentant  $\varphi$  dans le repère  $\mathbb{R}$ .

### Partie B

$\mathbb{C}$  est le corps des nombres complexes. On définit dans  $\mathbb{C}$  une loi interne, notée  $\star$ , de la manière suivante : si  $z = x + iy$ ,  $z' = x' + iy'$ ,  $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$ , on pose :

$$z \star z' = xx' + i(xy' + x'y).$$

1. Montrer que  $(\mathbb{C}, +, \star)$  est un anneau commutatif unitaire (+ désigne l'addition des nombres complexes).

2. a. Déterminer l'ensemble  $\mathbb{C}'$  des éléments de  $\mathbb{C}$  inversibles pour la loi  $\star$ . Si  $z = x + iy$  ( $x, y$  réels) est un élément de  $\mathbb{C}'$ , montrer que son inverse  $\tilde{z}$  pour la loi  $\star$  est  $\tilde{z} = \frac{\bar{z}}{x^2}$ ,  $\bar{z}$  désignant le complexe conjugué de  $z$ .

En déduire les éléments  $z$  de  $\mathbb{C}'$  tels que l'on ait :  $z = \tilde{z}$ .

Montrer que  $\mathbb{C}'$  est un groupe abélien pour la loi induite dans  $\mathbb{C}'$  par la loi  $\star$ .

b. Soit  $G$  le sous-ensemble de  $\mathbb{C}$  défini par :

$$G = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists t \in \mathbb{R}, z = e^t + ite^t\}$$

(où  $e$  est la base du logarithme népérien).

Montrer que  $G$  est un sous-groupe du groupe  $(\mathbb{C}', \star)$ .

3. Le complexe  $z = x + iy$  a pour image  $m(x; y)$  dans le plan  $\mathbb{P}$ .

a. Montrer que, dans  $\mathbb{P}$ , l'ensemble des points images des éléments de  $G$  est une partie  $\gamma$  de  $\mathbb{C}$  que l'on précisera.

b. Soit  $z$  un élément quelconque de  $G$ , d'image  $m$  dans  $\mathbb{P}$ .

Soit  $\tilde{m}$  l'image de  $\tilde{z}$  inverse de  $z$  pour la loi  $\star$ . Que peut-on dire des arguments de  $z$  et  $\tilde{z}$ ? En déduire une construction de  $\tilde{m}$  connaissant le point  $m$  de  $\gamma$ . (Faire une figure en supposant  $m$  distinct de  $A$ ).

- c. Soit  $z$  et  $z'$  deux éléments de  $G$ . On pose  $Z = z \star z'$ , On appelle  $m, m', M, A$  les points de  $P$  d'affixes respectives  $z, z', Z, 1$ .

Soit  $Z'$  l'affixe du point  $M'$  transformé de  $m'$  dans la similitude plane directe de centre  $O$  transformant  $A$  en  $m$ . Exprimer  $Z'$  en fonction de  $z$  et  $z'$ . Montrer que  $M$  et  $M'$  ont la même ordonnée.

En déduire une construction de l'image  $M$  de  $Z$  connaissant les images  $m$  et  $m'$  des éléments  $z$  et  $z'$  de  $G$ . (Faire une figure : on représentera les points  $A, m, m'$  sur  $\gamma$ ; on marquera les points  $M$  et  $M'$ ; la figure sera faite en supposant  $A, m, m', m$  distincts),

4. Soit  $z_0$  un élément donné de l'ensemble  $\mathbb{C}'$ ; on considère l'application  $f_{z_0}$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f_{z_0}(z) = z_0 \star z.$$

- a. Montrer que  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{C}$  considéré comme espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ ,
- b. Déterminer l'ensemble des nombres complexes invariants par  $f_{z_0}$ . Discuter.
- c. Déterminer et caractériser les automorphismes  $f$  involutifs.
- d. Soit  $F$  l'ensemble des automorphismes  $f_{z_0} : F = \{f_{z_0} \mid z_0 \in \mathbb{C}'\}$ .

Montrer que  $(F, \circ)$  est isomorphe à  $(\mathbb{C}', \star)$ , En déduire la structure de  $(F, \circ)$ ,  $\circ$  étant la loi de composition des applications.