

∞ Baccalauréat C Amiens juin 1981 ∞

EXERCICE 1

4 POINTS

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide :
 - a. Montrer que 1981 et 1815 sont premiers entre eux.
 - b. Déterminer deux entiers relatifs a et b tels que $1981a + 1815b = 1$.
2. En déduire que dans $\mathbb{Z}/1981\mathbb{Z}$, $\overline{1815}$ admet un inverse que l'on déterminera.
3. Résoudre alors dans $\mathbb{Z}/1981\mathbb{Z}$ l'équation $\overline{1815}x + \overline{1515} = 732$.
N.B.- \bar{n} désigne la classe de l'entier n dans l'ensemble $\mathbb{Z}/1981\mathbb{Z}$.

EXERCICE 2

4 POINTS

Soit \mathcal{P} un plan affine euclidien rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé direct. Soit f l'application de \mathcal{P} dans \mathcal{P} qui à tout point M de coordonnées $(x; y)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, associe la point M' de coordonnées $(x'; y')$ tel que

$$\begin{cases} x' &= \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' &= \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

1.
 - a. Montrer que f est bijective et déterminer l'ensemble des points invariants par f .
 - b. Déterminer l'ensemble des points M de \mathcal{P} tels que O, M, M' soient alignés.
2. On désigne par M_1 et M_2 les projections orthogonales du point M respectivement sur les droites (O, \vec{i}) et (O, \vec{j}) . Montrer que M' est le transformé de M_1 dans une rotation de centre M_2 dont on déterminera une mesure de l'angle.

PROBLÈME

12 POINTS

Partie A

Pour tout entier naturel n , non nul, on considère la fonction f_n définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \log x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Étudier les fonctions f_1 et f_2 et construire leur représentation graphique respective (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) dans un repère orthonormé du plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (on prendra 4 cm pour unité de longueur). Préciser la position relative de (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) .
2. Prouver que, pour tout n , f_n est intégrable sur $]0; 1]$. On définit, alors, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_0^1 f_n(x) dx.$$

3. a. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive de f_n sur $]0; 1]$.
 b. En déduire une primitive de f_n sur $[0; 1]$.
 c. Montrer que $u_n = -\frac{1}{(n+1)^2}$ et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
 d. Soit D le sous-ensemble du plan constitué des points M dont les coordonnées $(x; y)$ dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$ vérifient $0 \leq x \leq 1$ et $f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$.
 Calculer, en centimètres carrés, l'aire de D.

Partie B

Soit g la fonction, définie sur $[0; +\infty[$ par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x \log x}{x^2 + 1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que g est intégrable sur $[0; 1]$.
 2. Soit x un réel quelconque.
 a. Calculer pour tout n de \mathbb{N} la somme

$$x - x^3 + x^5 - x^7 + \dots + (-1)^n \times x^{2n+1}.$$

- b. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{x}{1+x^2} = x - x^3 + \dots + (-1)^n \times x^{2n+1} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{1+x^2}.$$

3. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 g(x) dx = u_1 - u_3 + \dots + (-1)^n u_{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{f_{2n+3}(x)}{1+x^2} dx.$$

4. On pose pour tout n de \mathbb{N} ,

$$S_n = u_1 - u_3 + \dots + (-1)^n u_{2n+1}.$$

- a. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \left| \int_0^1 g(x) dx - S_n \right| \leq -u_{2n+3}$.
 b. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 g(x) dx$.
 c. Déterminer un entier n_0 tel que

$$\left| \int_0^1 g(x) dx - S_{n_0} \right| \leq 10^{-2}.$$

En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près de $\int_0^1 g(x) dx$.

Partie C

Soit G la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

$$G(x) = \int_0^x g(t) dt.$$

1. Étudier la dérivabilité de G et son sens de variation.

2. a. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, t \geq 1, \frac{1}{2t^2} \leq \frac{1}{t^2+1} \leq \frac{1}{t^2}$.

b. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, x > 1, \frac{1}{2} \int_1^x \frac{\log t}{t} dt \leq G(x) \leq \int_1^x \frac{\log t}{t} dt.$$

c. Calculer pour tout $x > 1, \int_1^x \frac{\log t}{t} dt$.

d. Déduire de ce qui précède $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{G(x)}{x}$. (On pourra poser $X = \sqrt{x}$.)

3. Donner l'allure de la courbe représentative de G . Préciser la tangente au point d'abscisse 1 et la nature de la branche infinie.

La courbe a-t-elle une tangente au point d'abscisse 0?

N. B.- Pour obtenir une valeur approchée de $G(0)$ on utilisera B 4. c.

Pour obtenir une valeur approchée de $G(2)$ on utilisera l'encadrement obtenu au C 2.