

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C 1982 Amiens ∞

EXERCICE 1

4 points

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et  $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  une base orthonormée de  $E$ .

Soit  $\varphi$  l'endomorphisme de  $E$  défini analytiquement par :

$$\begin{cases} x' &= \frac{1}{2}(-x + z\sqrt{3}) \\ y' &= -y \\ z' &= \frac{1}{2}(-x\sqrt{3} - z) \end{cases}$$

1. Montrer que  $\varphi$  est une isométrie de  $E$ .
2.
  - a. Chercher le sous-espace vectoriel  $U$  de  $E$  des vecteurs transformés par  $\varphi$  en leurs opposés. On en donnera une base.
  - b. Montrer que les sous-espace  $U'$  orthogonal de  $U$  est globalement invariant par  $\varphi$ . On en donnera une base.
  - c. Le plan engendré par les vecteurs  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  étant supposé orienté par la base directe  $(\vec{e}_3, \vec{e}_1)$ , préciser la restriction de  $\varphi$  à cette base.
3. En conclure qu'il existe deux isométries  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  de  $E$  que l'on caractérisera avec précision telles que

$$\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_2 \circ \varphi_1.$$

EXERCICE 2

4 points

1. Soit  $\varphi$  l'application de  $\mathbb{R}^*$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \varphi(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} + 1.$$

Déduire de l'étude des variations de  $\varphi$  dans  $\mathbb{R}^*$ , celle du signe de  $\varphi(x)$  dans  $\mathbb{R}^*$ .

2. Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\begin{cases} f(0) &= 0 \\ f(x) &= \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

- a. Étudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en zéro.
- b. Déterminer le tableau de variations complet de  $f$  dans  $\mathbb{R}$  (on utilisera le 1 pour trouver le signe de  $f'(x)$ ).

- c. Soit  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'un plan affine euclidien.  
 Étudier la limite de  $f(x) - \frac{x}{2}$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  et quand  $x$  tend vers  $-\infty$ . Montrer que  $(\mathcal{C})$  admet une asymptote et construire  $(\mathcal{C})$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .  
 On représentera la courbe en choisissant, une unité de longueur égale à 5 cm.)

**PROBLÈME****12 points****Partie préliminaire**

1.  $(P)$  est un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .  
 Soit  $\varphi$  l'application de  $(P)$  dans  $(P)$  définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' &= y - 4 \\ y' &= x + 4. \end{cases}$$

Montrer que  $\varphi$  est une isométrie affine de  $(P)$  que l'on précisera.

2. On appelle  $f_a$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par :

$$f_a(x) = \frac{(a+2)x}{x+2-a},$$

$a$  étant un paramètre réel appartenant à  $\mathbb{R} - \{-2; +2\}$  et on appelle  $(\mathcal{C}_a)$  la courbe représentative de  $f_a$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  de  $(P)$ .

- a. Montrer que, pour tout  $a$  de  $\mathbb{R} - \{-2; +2\}$ ,  $(\mathcal{C}_a)$  est globalement invariante par  $\varphi$ .  
 b. Montrer que toutes les courbes  $(\mathcal{C}_a)$  passent par deux points indépendants de  $a$ .  
 c. Étudier les variations de  $f_a$  et construire dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  les courbes  $(\mathcal{C}_{-1})$  et  $(\mathcal{C}_{\frac{3}{2}})$ . (On utilisera pour la représentation graphique une unité de longueur égale à 2 cm.)

**Partie A**

Soit  $\omega_a$  le point de coordonnées  $(a-2; a+2)$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  de  $(P)$  et les vecteurs :

$$\vec{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j}) \quad \text{et} \quad \vec{J} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}).$$

1. Montrer que  $(\omega_a, \vec{I}, \vec{J})$  est un repère orthonormé de  $(P)$ .  
 2. Déterminer une équation de  $(\mathcal{C}_a)$  dans le repère  $(\omega_a, \vec{I}, \vec{J})$ .  
 En déduire que  $(\mathcal{C}_a)$  est une hyperbole équilatère (on notera  $A$  et  $A'$  les points d'intersection de l'hyperbole avec ses axes de symétrie; points appelés sommets de l'hyperbole).  
 3. a. Soit  $D$  la droite d'équation  $y = x + 4$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Montrer que par tout point  $M$  de  $D$ , à l'exclusion de points que l'on précisera, passe une courbe  $(\mathcal{C}_a)$  unique.

- b. Montrer que  $(\mathcal{C}_a)$  a ses sommets sur D si et seulement si  $|a| > 2$ .
- c. En déduire l'ensemble des points A et A' lorsque  $a$  varie dans  $] -\infty ; -2[ \cup ] 2 ; +\infty [$ .
4. On suppose ici  $|a| < 2$ .  
Évaluer en fonction de  $a$  les distances  $\omega_0\omega_a$  et  $\omega_aA$ ; en déduire la distance  $\omega_0A$ . Déterminer l'ensemble des points A et A' lorsque  $a$  varie dans  $] -2 ; 2[$ .

### Partie B

Dans cette partie on suppose  $a$  élément de l'intervalle  $I = ]0 ; 2[$ .

Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite numérique définie par  $U_0$  et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = f(U_n).$$

On suppose que  $U_0 \in ]0 ; 2a[$ .

1. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = f_a(U_n)$ .  
On suppose que  $U_0 \in ]0 ; 2a[$ .  
En déduire que la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est partout définie dans  $\mathbb{N}$ .  
Que peut-on dire de la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si  $U_0 = 0$  ou si  $U_0 = 2a$ ?
2. On suppose que  $U_0$  est différent de 0 et  $2a$  (par suite  $a$  est différent de 0).
- a. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (U_n \neq 0 \text{ et } U_n \neq 2a)$ . -
- b. Soit  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par : -

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n = \frac{U_n}{U_n - 2a}$$

Montrer que  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique dont on précisera la raison en fonction de  $a$ .

Étudier l'existence et la valeur de la limite de  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , en déduire l'existence et la valeur de la limite de  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

**N. B.** Les parties A et B sont indépendantes.