Baccalauréat C groupe 1 [1] juin 1984

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Soit $z_0 = \cos\dfrac{2\pi}{5} + \text{i}\sin\dfrac{2\pi}{5}$.

1. On pose $\alpha = z_0 + z_0^4$ et $\beta = z_0^2 + z_0^3$.

a. Montrer que $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$ et en déduire que α et β sont solutions de l'équation (1) $\quad X^2 + X - 1 = 0$.

b. Déterminer α en fonction de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$.

c. Résoudre l'équation (1) et en déduire la valeur de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$.

2. On appelle A_0, A_0, A_0, A_0, A_0 les points d'affixes respectives 1, z_0, z_0^2, z_0^3, z_0^4 dans le plan affine rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$.

a. Soit H le point d'intersection de la droite A_1A_4 avec l'axe $\left(\text{O},~\overrightarrow{u}\right)$. Montrer que $\overline{\text{OH}} = \cos\dfrac{2\pi}{5}$.

b. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre Ω d'affixe $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ passant par B d'affixe (i). Ce cercle coupe l'axe $\left(\text{O},~\overrightarrow{u}\right)$ en M et N. (On appellera M le point d'abscisse positive). Montrer que $\overline{\text{OM}} = \alpha$,
$\overline{\text{ON}} = \beta$ et que H est le milieu de [OM].

c. En déduire une construction simple du pentagone régulier dont on connaît le centre O et un sommet A_0.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$. Soit (E) l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x~;~y)$ vérifient l'équation

$$15x^2 + 13y^2 - 2xy\sqrt{3} = 768$$

et soit f l'application de P dans P qui à un point M de coordonnées $(x~;~y)$ associe M$'$ de coordonnées $\left(x'~;~y'\right)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l c l}
x' &=& \dfrac{1}{4}\left(x + y\sqrt{3}\right)\\
y' &=& \dfrac{1}{4}\left(-\sqrt{3}x + y\right)
\end{array}\right.$$

1. Montrer que f est une similitude plane directe que l'on caractérisera. Déterminer f^{-1}.

1. Amiens, Rouen

2. Déterminer une équation de $(f(\mathrm{E}))$ et montrer que $(f(\mathrm{E}))$ est une ellipse dont on précisera les sommets, les foyers, et l'excentricité.
3. En déduire que (E) est l'ensemble des points M du plan tels que
$\mathrm{MF}_1 + \mathrm{MF}'_1 = 16$ où F_1 et F'_1 sont deux points que l'on déterminera.

PROBLÈME **10 POINTS**

Partie A

On considère l'équation différentielle

$$y'(x) - y(x) = x + 2 \qquad (\mathrm{E})$$

1. Déterminer une fonction affine a solution de (E).
2. Montrer que si y est solution de (E), alors $y - a$ est solution d'une équation différentielle homogène du premier ordre. La résoudre.
3. Déterminer toutes les solutions de (E).

Partie B

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x - x - 3.$$

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.
   a. Montrer que $(\mathscr{C})$ admet une asymptote D dont on précisera l'équation. Préciser la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à cette asymptote.
   b. Construire $(\mathscr{C})$ (unité : 2 cm).
3. Déterminer l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$ du domaine limité par $(\mathscr{C})$, D et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$, avec $\alpha < 0$.
   Calculer $\displaystyle\lim_{\alpha \to -\infty}$.
4. Soit f_1 la restriction de f à l'intervalle $\mathrm{I} = [0\,;\ +\infty[$.
   a. Montrer que f_1 est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
   b. Étudier la continuité et la dérivabilité de f_1^{-1}. Construire sa courbe représentative $(\mathscr{C}')$ dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.
   c. Montrer que l'équation $f_1(x) = 0$ admet une solution unique que l'on encadrera par deux entiers consécutifs.

Partie C

Soit g la fonction définie par

$$g(x) = \ln(x + 3).$$

1. Étudier les variations de g et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé· (unité : 2 cm).

2. Soit (u_n) la suite définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \ln(u_n+3) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{array}\right.$$

a. En utilisant la croissance de g, étudier le sens de variation de la suite (u_n).

b. Montrer que la suite (u_n) est majorée par 2.

c. En déduire que cette suite est convergente. Soit ℓ sa limite.

3. Soit (v_n) la suite définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} v_0 & = & 2 \\ v_{n+1} & = & \ln(v_n+3) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{array}\right.$$

a. En utilisant la croissance de g, étudier le sens de variation de la suite (v_n).

b. Montrer que la suite (v_n) est minorée par 1.

c. En déduire que cette suite est convergente. Soit ℓ' sa limite.

4. Montrer que $\ell = \ell'$.

a. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n - u_n = \int_{u_{n-1}}^{v_{n-1}} \frac{1}{t+3}\,\mathrm{d}t.$$

b. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant v_n - u_n \leqslant \frac{1}{4^n}.$$

c. En déduire une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.