Durée : 4 heures

Baccalauréat C Amiens, Rouen juin 1985 [1]

EXERCICE 1 **4 points**

On désigne par $\mathbb{C}^{\star}$ le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ privé de zéro.
Soit f l'application de $\mathbb{C}^{\star}$ dans définie par

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

pour tout z élément de $\mathbb{C}^{\star}$.

1. Calculer les parties réelle et imaginaire de $f(z)$ en fonction des module et argument de z.
2. Soit φ l'application du plan privé de l'origine O dans le plan qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $f(z)$.
   Quelle est la nature de l'image par φ d?un cercle de centre O et de rayon R?

EXERCICE 2 **5 points**

L?espace E est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$.
Soit f l'application affine de E dans E qui, au point M de coordonnées $(x~;~y~;~z)$, associe le point $M' = f(M)$ de coordonnées $(x'~;~y'~;~z')$ définies par :

$$\left\{\begin{array}{l c l}
x' &=& \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)\\
y' &=& y+1\\
z' &=& \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}z + \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{3}\right)
\end{array}\right.$$

1. Montrer que f est une isométrie et déterminer l'ensemble des points invariants par f.
2. **a.** Montrer que l'ensemble des vecteurs invariants par l'endomorphisme associé à f est une droite vectorielle dont on précisera une base $\left(\overrightarrow{U_0}\right)$.
   b. Déterminer l'ensemble D des points M tels que $\overrightarrow{Mf(M)}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{U_0}$ et calculer $\overrightarrow{Mf(M)}$ pour tout point M de D.
3. **a.** Soit t la translation de vecteur $\vec{\jmath}$. Montrer que l'application $r = t^{-1}\circ f$ admet une droite de points invariants.
   b. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $y = 0$ et A le point de coordonnées $(1 ; 0 ; 1)$.
   On rapporte $\mathcal{P}$ au repère $\mathcal{R} = \left(\text{A},~\vec{\imath},~\vec{k}\right)$.
   Montrer que, pour tout point M de $\mathcal{P}$, $r(M)$ appartient à $\mathcal{P}$.
   On note r' la restriction de r à $\mathcal{P}$. Pour M de coordonnées $(X~;~Z)$ dans $\mathcal{R}$, déterminer les coordonnées $(X'~;~Z')$ dans $\mathcal{R}$ de $r'(M)$ en fonction de X et Y.
   Caractériser r' ; on supposera que le repère $\mathcal{R}$ est direct.

1. Amiens, Rouen

4. En déduire que f est un vissage dont on déterminera l'axe, le vecteur et le cosinus de l'angle.

PROBLÈME **11 points**

A.

1. Étudier les variations de l'application f de $]0\,;\,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

   et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
2. Déduire de l'étude précédente le nombre de solutions réelles de l'équation $\mathrm{e}^{ax} - x = 0$ suivant les valeurs du nombre réel a.

B.

On considère, pour a réel donné, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie de la manière suivante :

$$U_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = \mathrm{e}^{aU_n}.$$

1. Pourquoi peut-on affirmer que si la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite u est solution de l'équation $\mathrm{e}^{ax} - x = 0$?
2. On suppose $a > 0$.
   a. Montrer par récurrence que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   b. Que peut-on dire alors de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$? si $a > \dfrac{1}{\mathrm{e}}$?
   c. On suppose que $0 \leqslant a \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
   Montrer par récurrence sur l'entier n que $U_n \leqslant \mathrm{e}$.
   Que peut-on dire alors de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. On suppose $a < 0$.
   a. p et n étant deux entiers naturels quelconques, exprimer

$$\int_{U_p}^{U_n} \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x \quad \text{en fonction de } U_{p+1} \text{ et } U_{n+1}.$$

   b. En utilisant la question précédente, comparer les signes de $U_{n+2} - U_n$ et $U_{n+1} - U_{n-1}$. En déduire que $U_{n+2} - U_n$ et $U_n - U_{n-2}$ sont de même signe.
   c. Quels sont les signes de $U_2 - U_0$ et $U_3 - U_1$?
   Pour tout entier n, soient $V_n = U_{2n}$ et $W_n = U_{2n+1}$.
   Montrer que les suites $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.

d. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < U_n \leqslant 1$. Les suites $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles convergentes ?

e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |U_{n+1} - U_n| \leqslant |a|^n\,|U_1 - U_0|.$$

Que peut-on en conclure pour les suites $(U_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(U_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ si $-1 < a < 0$?

Qu'en résulte-t-il alors pour la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$?