Durée : 4 heures

Baccalauréat C Amiens septembre 1969

Exercice 1

Résoudre, dans l'ensemble, C, des nombres complexes, l'équation

$$Z^2 - 4(6+\mathrm{i})Z + 3(63+16\mathrm{i}) = 0.$$

Exercice 2

O et O′ étant deux points distincts du plan, on désigne respectivement par S la similitude de centre O, d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et de rapport 2, par S' la similitude de centre O′, d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ et de rapport $\dfrac{1}{2}$.
On fait la transformation S d'abord, la transformation S' ensuite ; déterminer la transformation produit $T = S' \circ S$ (on montrera qu'elle admet un point double, que l'on construira).

Problème

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. On appelle $x'x$ et $y'y$ les parallèles menées par O respectivement aux vecteurs t et j. On donne les points fixes A$(a~;~-a)$ et B $(a~;~a)$, a étant un nombre donné, strictement positif. Soit T la transformation ponctuelle qui, au point $m(x~;~y)$, fait correspondre le point $M(X~;~Y)$ tel que

$$(1) \quad 2a\,\overrightarrow{Mm} + (x-y)\,\overrightarrow{M\mathrm{A}} + (x+y)\,\overrightarrow{M\mathrm{B}} = \vec{0}\,.$$

1. Calculer X et Y en fonction de $a,~x,~y$ et vérifier que l'on a la relation

$$(2) \quad \overrightarrow{\mathrm{O}M} = \frac{2a}{a+x}\overrightarrow{\mathrm{O}m}.$$

   Déterminer l'ensemble, E_1 des points qui n'admettent pas de transformé et l'ensemble, E_2 des points doubles.
   Quel est le transformé d'un point m de l'axe $y'y$?
   Calculer x et y en fonction de X et Y.
   À quelle condition un point M du plan peut-il être considéré comme le transformé d'un point m par T ?

2. Démontrer qu'une droite (δ), d'équation

$$x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0,$$

   a pour transformée une droite (Δ), dont on donnera l'équation.
   Comment faut-il choisir (δ) pour que les droites (δ) et (Δ) soient

   a. confondues ;

b. strictement parallèles ;

c. concourantes ?

Dans ce dernier cas, montrer que (δ) et (Δ) se coupent sur une droite fixe et donner alors une construction géométrique de (Δ), connaissant (δ). En déduire une construction de M, connaissant m.

3. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{O}m} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O}M}$ en fonction de a, x et y.

Comment faut-il choisir le nombre réel k pour qu'il existe des points m tels que

$$\overrightarrow{\mathrm{O}m} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O}M} = k ?$$

4. Soit (C) le cercle de centre O, de rayon R. Montrer que le transformé, (C'), de (C) par T est une conique admettant $x'x$ pour axe de symétrie.

Discuter, suivant la valeur de R, la nature de (C'). Pouvait-on prévoir géométriquement les résultats trouvés ?

Construire (C') dans le cas où $R = \dfrac{a}{2}$. Déterminer en particulier les sommets de (C') et ses points d'intersection avec $y'y$.