∽ Baccalauréat C Amiens septembre 1972 ∾

EXERCICE 1

Soit l'équation (E) suivante, à coefficients complexes,

$$(E) \qquad z^3 - z^2(6+3\mathrm{i}) + (21+19\mathrm{i}) - 26(1+\mathrm{i}) = 0.$$

Sachant qu'elle admet une racine réelle, et une seule, calculer cette racine. Résoudre ensuite l'équation dans le corps $\mathbb{C}$.

EXERCICE 2

L'espace $(\mathscr{E})$ est rapporté à un repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On considère l'application f, de $(\mathscr{E})$ dans $(\mathscr{E})$, qui au point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ associe le point $M'(X\ ;\ Y\ ;\ Z)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{lcl} X & = & x+2y+3z,\\ Y & = & x +2z,\\ Z & = & 2y+z. \end{array}\right.$$

1. En étudiant la relation réciproque de l'application f, déterminer la nature de f. Définir géométriquement l'image $f(\mathscr{E})$ de $(\mathscr{E})$ par f.
2. Que sont les images réciproques, $f^{-1}\left(M'\right)$, des points M' de $f(\mathscr{E})$? Les définir géométriquement.
3. Existe-t-il des points M tels que les trois points O, M et M' soient alignés ? Définir géométriquement les sous-ensembles de $(\mathscr{E})$ ainsi trouvés.

PROBLÈME

Partie A

Soit $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ une base orthonormée du plan vectoriel euclidien, k un nombre réel et f une application linéaire du plan dans lui-même définie par

$$f\left(\vec{\imath}\right) = \vec{\imath'} = k\vec{\imath} + \vec{\jmath} \quad \text{et} \quad f(\vec{\jmath}) = \vec{\jmath'} = \vec{\imath} - k\vec{\jmath}\,.$$

1. Montrer que le couple $\left(\vec{\imath'},\ \vec{\jmath'}\right)$ esL une base du plan vectoriel. Écrire la matrice N de f dans la base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
2. Calculer la matrice $N^2 = N \times N$. En déduire la nature de l'application $f \circ f$.

Partie B

Dans le plan affine euclidien rapporté au repère $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$, on considère l'application affine T associée à l'application f et telle que l'image du point O par T soit le point A de coordonnées $(1\,;\ -1)$ $[T(\text{O}) = \text{A}]$.

1. Au point M de coordonnées $(x\,;\ y)$, T fait correspondre le point M' de coordonnées $(x'\,;y')$ $[T(M) = M']$. Montrer que ces coordonnées sont liées par les relations

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' & = & kx + y + 1,\\ y' & = & x - ky - 1.\end{array}\right.$$

2. Démontrer que l'application T est bijective.
3. Démontrer qu'en général il existe un point invariant, que l'on déterminera. Discuter suivant les valeurs de k.
4. Déterminer l'application réciproque T^{-1} de T.

Partie C

Dans le plan complexe, soit $z' = x' + \text{i}y'$ l'affixe de M' et $z = x + \text{i}y$ l'affixe de M.

1. Démontrer que z' s'exprime en fonction de $\overline{z}$ (conjugué de z) par

$$z' = (k + \text{i})\overline{z} + 1 - \text{i}.$$

2. k étant non nul, par quelle transformation géométrique passe-t-on d'un point d'affixe z au point d'affixe z' ?

Partie D

On suppose maintenant $k = 0$; soit T_0 l'application correspondante.

1. Démontrer que T_0 est une isométrie involutive et qu'elle est une symétrie par rapport à une droite.
2. Soit la parabole (P) d'équation $y = (x - 1)^2$.
   Déterminer l'équation de la courbe (P′) transformée de (P) par T_0. Quelle est la nature de (P′) ?
3. (P) et (P′) ont en commun deux points B et C ; calculer l'aire de la partie du plan limitée par les deux arcs BC de (P) et de (P′).‡®