

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Amiens septembre 1975 ∞

EXERCICE 1

On considère les nombres $A = 2n + 3$ et $B = 5n - 2$ où n est un entier naturel.

1. Trouver deux entiers naturels u et v , premiers entre eux, tels que $Au - Bv$ soit indépendant de n . En déduire que, si A et B ne sont pas premiers entre eux, leur p.g.c.d. est 19.
2. Étudier l'ensemble des entiers n tels que le p.g.c.d. de A et B soit égal à 19.

EXERCICE 2

On donne la fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$f(x) = x + \text{Log} [1 + |1 - x|].$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f sur \mathbb{R} .
2. Étudier la fonction f et la représenter graphiquement dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On indiquera, avec précision, les tangentes ou demi-tangentes aux points remarquables de la courbe.
3. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} . Représenter f^{-1} dans le repère du 2.
4. Calculer $I = \int_0^2 [x - f(x)] dx$.
Interpréter cette valeur de I .

PROBLÈME

Partie A

Soit E un plan vectoriel euclidien, muni d'une base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) notée aussi \mathcal{B} .

1. On considère l'endomorphisme F de E ayant pour matrice dans la base : $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Pour tout couple (\vec{v}, \vec{v}') de E^2 , comparer les produits scalaires $F(\vec{v}) \cdot F(\vec{v}')$ et $\vec{v} \cdot \vec{v}'$; en déduire que F ne conserve pas le produit scalaire mais « conserve » l'orthogonalité et « multiplie » la norme de tout vecteur par $\sqrt{2}$.
Montrer que F est la composée d'une homothétie de rapport $\sqrt{2}$ et d'une symétrie vectorielle orthogonale s par rapport à une droite vectorielle Δ , que l'on déterminera avec précision. Évaluer les applications F_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2. On considère également l'endomorphisme G de E ayant pour matrice dans la base

$$\mathcal{B} : \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Comparer également les produits scalaires $G(\vec{v}) \cdot G(\vec{v})$ et $\vec{v} \cdot \vec{v}$. Que peut-on conclure pour G ?

Montrer que G est la composée d'une homothétie vectorielle de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'une rotation r dont on déterminera l'angle.

Préciser G^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Déterminer la matrice et la nature des endomorphismes de E , s' et s'' tels que : $r = s \circ s' = s'' \circ s$; préciser $F \circ G$ et $G \circ F$.

Partie B

Soit un plan affine euclidien \mathcal{E} associé à E et muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, (\vec{i}, \vec{j}) étant la base orthonormée définie en A.

On appelle f et g les applications affines de \mathcal{E} vers \mathcal{E} associées respectivement à F et G et laissant le point $\Omega(1; 1)$ invariant. À chaque point $M(x; y)$ de \mathcal{E} on associe son affixe $z = x + iy$.

1. Montrer que l'affixe z_1 de M_1 , si $M_1 = f(M)$, est égale à $(1 - i)(1 - \bar{z})$.

Quelle est la nature géométrique de f ?

Soit A le point d'affixe 1. Soit les points $A_0 = A, A_1, A_2, \dots, A_n$ tels que

$$A_n = f(A_{n-1}) \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

Montrer que tous les points A_n appartiennent à l'union de deux demi-droites d'origine Ω .

2. Montrer que l'affixe z'_1 de M'_1 si $M'_1 = g(M)$, est égale à $\frac{1-i}{2}z + i$.

Quelle est la nature géométrique de g ?

Soit les points $A'_0 = A, A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ tels que $A'_n = g(A'_{n-1})$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que si l'on pose : $u_n = a'_n - a'_{n-1}$ et $v_n = |u_n|$, a'_n désignant l'affixe de A'_n , les suites :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u_n \end{array} \quad \text{et} \quad v : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & v_n \end{array}$$

sont des suites géométriques.

Calculer la somme S_n des n premiers termes de la suite v . Montrer que S_n admet une limite, que l'on calculera, quand n tend vers $+\infty$.

Partie C

1. Construire dans le repère précédent $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (C) d'équation

$$y = \frac{x}{x-1}.$$

Déterminer les valeurs de α ($\alpha < 1$) pour que l'aire arithmétique du domaine limité par (C) et les droites d'équations : $y = 1$, $x = -1$ et $x = 0$ soit égale à $2 \text{ Log } 2$.

2. (C_1) désignant la transformée de (C) par f , donner une équation de (C_1) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ puis dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{i})$. Construire (C_1) .
3. Déterminer la nature géométrique de $g \circ f$. Quelle est la transformée de la courbe (C) par $g \circ f$? Expliquer le résultat obtenu.