

## ♣ Baccalauréat C Amiens septembre 1976 ♣

### EXERCICE 1

1. Résoudre l'équation  $X^2 + X = 0$ 
  - a. dans  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ ;
  - b. dans  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ .
2. Dans  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ , on considère l'équation  $X^2 + X - m = 0$ .  
Discuter suivant les valeurs de  $m$ , élément de  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ , le nombre de solutions de cette équation.

### EXERCICE 2

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  directe.

$$\text{Soit } \vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{j} - \vec{k}), \quad \vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{j} + \vec{k}).$$

1. Déterminer la nature de l'isométrie vectorielle  $\varphi$  telle que  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  ait pour image  $(\vec{i}, \vec{u}, \vec{v})$ .  
En déduire que  $(\vec{i}, \vec{u}, \vec{v})$  est une base orthonormée directe,
2. On considère la rotation vectorielle  $r$  d'axe  $\Delta$ , orienté par  $\vec{v}$  et d'angle de mesure  $\theta$ .
  - a. Déterminer  $r(\vec{i}), r(\vec{u}), r(\vec{v})$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{u}, \vec{v})$ .
  - b. Déterminer  $r(\vec{i}), r(\vec{j}), r(\vec{k})$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{u}, \vec{v})$  puis dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .
  - c. En déduire les composantes  $(x'; y'; z')$  de  $\vec{w}' = r(\vec{w})$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  en fonction des composantes  $(x; y; z)$  de  $\vec{w}$  dans cette même base.

### PROBLÈME

Dans tout le problème, le plan euclidien  $P$  est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Le plan vectoriel euclidien de base  $(\vec{i}, \vec{j})$  est désigné par  $\pi$ .

**Les parties A et B sont totalement indépendantes**

Une table de valeurs de la fonction exponentielle de base  $e$  est donnée en annexe pour faciliter les calculs

#### Partie A

Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R} - \{1\}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\begin{cases} f(0) &= 0 \\ f(x) &= \frac{x^2}{x-1} e^{\frac{1}{x}} \quad \text{si } x \text{ est distinct de } 0 \text{ et } 1 \end{cases}$$

1. Étudier si les restrictions de  $f$  aux intervalles  $]-\infty; 0[$ ,  $]0; 1[$ ,  $]1; +\infty[$  admettent des limites aux bornes de ces intervalles.

Étudier la variation de  $f$  (on pourra utiliser le tableau annexe pour calculer des valeurs approchées de  $f$  aux points où la fonction dérivée s'annule).

2. Montrer que, pour tout réel  $u$  non nul, on a :  $e^u - 1 > u$ .

En déduire le signe de  $\frac{e^u - 1}{u}$  sur chacun des intervalles  $]-\infty; 0[$ ,  $]0; +\infty[$ .

3. Soient les applications  $g$  et  $h$  de  $\mathbb{R} - \{1\}$  vers  $\mathbb{R}$  définies par :

$$\begin{cases} g(x) &= f(x) - xe^{\frac{1}{x}} \\ h(x) &= x(e^{\frac{1}{x}} - 1) \end{cases}$$

- a. Montrer que les fonctions  $g$ ,  $h$ ,  $g + h$  admettent des limites que l'on calculera quand  $x$  tend vers  $+\infty$  ou quand  $x$  tend vers  $-\infty$ . En déduire que la courbe  $C$  représentative de  $f$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  admet la droite  $\Delta$ , dont une équation est  $y = x + 2$  comme asymptote.

- b. Montrer les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} (\forall x \in ]1; +\infty[), & \quad g(x) > 1 \quad \text{et} \quad h(x) > 1 \\ (\forall x \in ]-\infty; 0[), & \quad g(x) < 1 \quad \text{et} \quad h(x) < 1 \end{aligned}$$

En déduire la position de  $C$  par rapport à  $\Delta$ .

4. Tracer la courbe  $C$ . Préciser la tangente à  $C$  au point  $A$  d'abscisse 0,5.

### Partie B

$a$  est un réel donné.

$K_a, T_a$  désignent des applications affines de  $P$  dans  $P$ .

$k_a, t_a$  sont les endomorphismes de  $\pi$  associés respectivement aux applications affines précédentes.

L'application  $K_a$  fait correspondre à tout point  $M(x; y)$  de  $P$  le point  $M'(x'; y')$  de  $P$  tel que :

$$\begin{cases} x' &= -x + a \\ y' &= -ax + (3 - a)y + 2 \end{cases}$$

$S_a$  est la symétrie centrale de  $P$ , de centre  $I_a$  point défini ci-dessous en B 1.

1. Montrer que l'application  $K_a$  admet toujours au moins un point invariant.

Quel est l'ensemble  $E$  des valeurs de  $a$  pour lesquelles  $K$  admet un seul point invariant  $I_a$  ?

2. On suppose  $a \in E$ . Montrer que  $K_a \circ S_a = S_a \circ K_a$ . On désignera par  $T_a$  la transformation composée précédente.

Dans le cas  $a = 3$ , déterminer  $t_0(i)$ ,  $t_0(j)$ . Exprimer, dans le repère  $(I_0, \vec{i}, \vec{j})$  les coordonnées  $(X_0; Y_0)$  de  $M_0 = T_0(M)$  en fonction des coordonnées  $(x_0; y_0)$  de  $M$  dans ce même repère. En déduire une construction simple de l'image  $M'$  de  $M$  par  $K_0$ .

3. On suppose  $a = 3$ . Montrer que  $T_3$  est une projection que l'on définira avec précision.
4. On suppose  $a = 2$ .  $K_2$  est alors une symétrie par rapport à une droite  $D$  suivant une direction  $S$ . Préciser la droite  $D$  et la direction  $S$ .  
 $m$  étant un réel donné, déterminer  $k_2(\vec{i} + m\vec{j})$ .

### Partie C

Soit  $\Gamma$  l'ensemble des transformés des points de  $C$  par la symétrie  $K_2$ .

1. Montrer que  $\Gamma$  est la courbe représentative de l'application  $\psi$  de  $\mathbb{R} - \{1\}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\psi(X) = 2X - 2 + f(2 - X)$$

2. Soit  $m$  le coefficient directeur de la tangente à  $C$  en l'un de ses points  $M(x; f(x))$ ,  $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ . Quel est le coefficient directeur de la tangente à  $\Gamma$  en  $M' = K_2(M)$ ?
3. Préciser les asymptotes de  $\Gamma$ . Sans étudier la variation de  $\psi$ , tracer la courbe  $\Gamma$ ;  $\Gamma$  et  $C$  seront dessinées dans le même repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

*Annexe.* Tableau donnant des valeurs approchées de  $e^x$  et  $e^{-x}$  pour différentes valeurs de  $x$ .

$x$	$e^x$	$e^{-x}$
0,100	1,105 2	0,904 8
0,200	1,221 4	0,818 7
0,250	1,284 0	0,778 8
0,382	1,465 2	0,682 5
0,500	1,648 7	0,606 5
1,000	2,718 3	0,367 9
2,000	7,389 1	0,135 3
2,500	12,182	0,082 1
2,618	13,962	0,071 6