

♣ Baccalauréat Amiens septembre 1979 ♣

EXERCICE 1

4 POINTS

1. Démontrer qu'il existe au moins deux entiers relatifs k et ℓ tels que :

$$13k - 23\ell = 1$$

Déterminer, à l'aide de l'algorithme d'Euclide, deux de ces entiers.

2. Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation :

$$-156x + 256y = 24.$$

EXERCICE 2

4 POINTS

On considère la fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$f(x) = (x+1)\text{Log}|x+1| \quad \text{si } x \neq -1 \text{ et } f(-1) = 0.$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en -1 .

Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) relativement à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Montrer que (C) admet un centre de symétrie I.

2. Déterminer, lorsqu'elle existe, la dérivée de la fonction F de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que :

$$F(x) = (x+1)^2 \text{Log}|x+1|.$$

α étant un réel tel que $0 < \alpha < 1$, calculer l'aire \mathcal{A}_α de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations $x = -1 + \alpha$ et $y = 0$.

Montrer que cette aire admet une limite lorsque α tend vers 0 et interpréter ce résultat.

PROBLÈME

12 POINTS

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté dont une base orthonormée directe est $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et un espace affine associé à E et rapporté au repère

$$\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}).$$

Partie A

Soit φ l'endomorphisme de E tel que :

$$\begin{cases} \varphi(\vec{i}) = -\frac{1}{2}(\vec{i} - \vec{j}) \\ \varphi(\vec{j}) = \frac{1}{2}(\vec{i} - \vec{j}) \\ \varphi(\vec{k}) = \vec{k} \end{cases}$$

1. Dans \mathcal{B} , un vecteur \vec{V} a pour coordonnées $(x ; y ; z)$ et son image $\varphi(\vec{V})$ a pour coordonnées $(x' ; y' ; z')$. Calculer x' , y' et z' en fonction de x , y et z .
2. Montrer que le noyau de φ est la droite vectorielle Δ de base $\vec{i} + \vec{j}$ et que l'image de φ est le plan vectoriel P orthogonal à Δ .
3. a. Montrer que l'ensemble des vecteurs \vec{V} de E tels que V et $\varphi(\vec{V})$ soient linéairement dépendants est la réunion de trois droites vectorielles deux à deux orthogonales et dont l'une est Δ .
b. Quelle est la restriction, φ_1 de φ à P ?
4. Soit $\mathcal{B}' = (\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ la base orthonormée directe-telle que

$$\vec{i}' = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} - \vec{j}).$$

- a. Déterminer \vec{j}' , $\varphi(\vec{i}')$ et $\varphi(\vec{j}')$.
- b. Dans \mathcal{B}' , un vecteur \vec{V} a pour coordonnées $(X ; Y ; Z)$ et $\varphi(\vec{V})$ a pour coordonnées $(X' ; Y' ; Z')$. Calculer X' , Y' et Z' en fonction de X , Y et Z .
- c. Montrer que φ s'écrit $\varphi = \psi \circ \sigma = \sigma \circ \psi$ où σ est la symétrie vectorielle orthogonale par rapport au plan vectoriel P' orthogonal à \vec{i}' , et ψ une projection vectorielle orthogonale à déterminer.

Partie B

On considère l'application f de (\mathcal{E}) dans (\mathcal{E}) qui à tout point M de coordonnées $(x ; y ; z)$ dans (\mathcal{R}) fait correspondre le point M' de coordonnées $(x' ; y' ; z')$ dans (\mathcal{R}) défini par :

$$\begin{cases} x &= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 1 \\ y &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 1 \\ z' &= z. \end{cases}$$

1. Montrer que f est une application affine de (\mathcal{E}) dont l'endomorphisme associé est φ .
2. Quel est l'ensemble des points de (\mathcal{E}) invariants par f ?
3. a. Montrer que le plan (\mathcal{P}) passant par $A(1 ; 1 ; 1)$ et de direction P est globalement invariant par f .
b. Quelle est la restriction, f_1 , de f au plan (\mathcal{P}) ?
c. Montrer que f s'écrit $f = s \circ p$ où s et p sont respectivement une symétrie orthogonale et une projection orthogonale à préciser.
d. Soit le repère $\mathcal{R}' = (A, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$. Calculer les coordonnées $(X' ; Y' ; Z')$ de $M' = f(M)$ dans \mathcal{R}' en fonction des coordonnées $(X ; Y ; Z)$ de M dans \mathcal{R}' .
4. Soit (\mathcal{S}) la sphère de centre A et rayon R et (\mathcal{C}) le cercle intersection de cette sphère avec le plan Q passant par A et dont la direction est orthogonale à \vec{i} .

- a. Quelle est, l'image de (\mathcal{S}) par f
- b. Donner une représentation paramétrique de (\mathcal{C}) dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ puis dans le repère $\mathcal{R}' = (A, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$.
- c. Quelle est l'image de (\mathcal{C}) par f ? Vérifier que cette image est bien incluse dans l'image de (\mathcal{S}) .
Faire une figure dans le plan (\mathcal{P}) .