∽ Baccalauréat C Amiens septembre 1987 ∾

EXERCICE

Soit (E) l'équation différentielle :

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

1. Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie :

$$f(-1) = 0 \quad \text{et} \quad f(-1) = 1.$$

2. Étudier les variations de la fonction f ; préciser ses limites aux bornes de son ensemble de définition et tracer sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

3. Calculer l'aire du domaine limité par la courbe, et les droites d'équations : 3

$$y = O, \quad x = -\frac{3}{2} \quad \text{et}\, x = -1.$$

PROBLÈME

(P) est le plan rapporté au repère orthonormé direct $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$; A est le point de coordonnées $(1 ; 0)$.

(C) est le cercle de centre O et de rayon 1.

À tout point de (P) de coordonnées $(x ; y)$ on associe son affixe z égale à $x + \text{i}y$ où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

f est l'application de $\mathbb{C}$ dans lui-même définie par :

$$f(z) = 2z - z^2.$$

F est l'application de (P) dans lui-même qui à tout point m d'affixe z associe le point M d'affixe Z égale à $f(z)$.

On prendra 3 cm pour unité de longueur.

Le but de ce problème est d'étudier l'image (K) du cercle (C) par F.

Partie I

Soit m un point du cercle (C) d'affixe z et M son image par F.

1. **a.** Soient m_1 et m_2 les points d'affixes respectives z^2 et $2z$.
Quels sont les modules de z, $2z$ et z^2 ?
Donner les arguments de $2z$ et z^2 en fonction de celui de z.

b. Montrer que le quadrilatère $\text{O}m_1m_2M$ est un parallélogramme.

c. En déduire une construction géométrique simple de M à partir de m.

2. Montrer que A et M sont symétriques orthogonalement par rapport à la tangente (T) en m au cercle (C).

En déduire une autre construction de M à partir de m.

M. B. : On veillera à faire deux figures distinctes accompagnées d'une courte explication du tracé effectué.

Partie II

Soit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [-\pi\,;\,\pi]$ l'affixe d'un point m de (C).

1. Calculer $f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)$ et en déduire que l'image (K) de (C) par F est la courbe paramétrée :

$$\left\{\begin{array}{lcl} X(t) & = & 2\cos t - \cos 2t \\ Y(t) & = & 2\sin t - \sin t \end{array}\right. \quad (t \in [-\pi\,;\,\pi]).$$

2. Montrer que les points d'affixes $f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)$ et $f\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Étudier sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ les variations des fonctions X et Y de la variable t. Qu'en déduit-on pour (K) ?

3. **a.** Montrer que si t est différent de 0, la tangente à (K) au point M de paramètre t est dirigée par le vecteur de coordonnées :

$$3t.3t\left(\cos\frac{3t}{2}\sin\frac{3t}{2}\right)$$

On admettra que ce résultat est encore valable quand t est nul.

b. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{mM}$ est orthogonal à la tangente à (K) en M.

4. Construire les points de (K) où la tangente est parallèle aux axes de coordonnées.

5. Tracer (K).

On rappelle que :

$$\begin{array}{lcl} \sin p + \sin q & = & 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q & = & 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2} \\ \cos p + \cos q & = & 2cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q & = & -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}. \end{array}$$