

∞ Baccalauréat C Amiens septembre 1984 ∞

EXERCICE 1

On considère un triangle isocèle ABC de côté BC = 2a, AC = AB = 30, a étant un réel positif fixé. On note A' le milieu de BC et H l'orthocentre du triangle.

1. Soit θ une mesure de l'angle \widehat{BAC} . Montrer que $\cos \theta = \frac{7}{9}$;

2. Soit B' la projection orthogonale de B sur la droite (AC).

Calculer $\frac{\overline{B'A}}{\overline{B'CA}}$.

En déduire deux réels u et v tels que le point B' soit le barycentre du système : (A, u); (C, v).

3. En s'aidant de la deuxième question, déterminer trois réels a, b, c tels que le point H soit le barycentre du système : {(A, a); (B, b); (C, c)}.

EXERCICE 2

Soit, dans le plan affine euclidien P, un carré ABCD, de côté de longueur c, où $c \in \mathbb{R}_+^*$.

On considère un réel α et f_α l'application du plan dans lui-même

$$f_\alpha \left\{ \begin{array}{l} P \rightarrow P \\ M \rightarrow M' \end{array} \right.$$

telle que $\overrightarrow{MM'} = \alpha \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \alpha \overrightarrow{MD}$.

1. Déterminer, suivant les valeurs de α , la nature et les éléments caractéristiques de f_α .

2. Déterminer, puis construire l'ensemble E_1 des points M du plan P tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4c^2.$$

3. Déterminer, puis construire l'ensemble E_2 des points M du plan P tels que :

$$\left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \right\| = \left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \right\|$$

EXERCICE 3

Les parties B et C sont indépendantes, l'une de l'autre.

La partie C est, dans une large mesure, indépendante de A.

Soit le plan \mathcal{P} rapporté à un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$. Dans tout le problème on note, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, f_p la fonction définie par :

$$\begin{cases} f_p(x) = x^p \ln |x| & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ f_p(0) = 0. \end{cases}$$

Soit \mathcal{C}_p la courbe représentative de f_p dans \mathcal{R} .

Partie A

1. Étudier, suivant les valeurs de p, la continuité et la dérivabilité de f_p en 0.

2. Étudier la parité de f_p . Calculer $f_p(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

3. a. Calculer la limite de f_p quand x tend vers $+\infty$.

- b.** Étudier les variations de f_p (on distinguera quatre cas : $p < 0$, $p = 0$, $p = 1$, $p > 1$).
4. En calculant un développement limité d'ordre 1 de $(1+h)^p$ en zéro, et un développement limité d'ordre 2 de $\ln(1+h)$ en zéro, déduire un développement limité d'ordre 2 de $f_p(1+h)$ en zéro.
En déduire l'équation de la tangente D à toutes les courbes \mathcal{C}_p au point d'abscisse 1, ainsi que les positions relatives de \mathcal{C}_p et de D suivant les valeurs de p .
5. Donner l'allure des courbes \mathcal{C}_0 , \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_{-2} . On fera trois figures différentes, et l'on prendra 2 cm comme unité.
6. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, déterminer, en intégrant par parties, l'aire de la partie de plan limitée par la droite (O, \vec{i}) , les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^{\frac{1}{p+1}}$ et la courbe \mathcal{C}_p .

Partie B

On considère la fonction $g = f \circ \sin$.

$$\text{On a donc } \begin{cases} g(x) &= \sin x \ln |\sin x| & \text{si } x \neq k\pi \\ g(k\pi) &= 0. \end{cases}$$

- Étudier la continuité et la dérivabilité de g en 0.
- Montrer qu'il existe un seul $x_0 \in [0; \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin x_0 = \frac{1}{e}$.
- Étudier les variations de g en précisant la période et la parité; puis tracer la courbe représentative de g sur une période, dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

Partie C

On considère la suite (u_p) définie par u_0 et pour tout p appartenant à \mathbb{N}

$$u_{p+1} = f_1(u_p).$$

- Étudier (u_p) dans le cas où $u_0 = 0$; $u_0 = e$; $u_0 = -e$.
- Si $u_0 = \frac{1}{e}$ ou $u_0 = -\frac{1}{e}$, montrer que (u_p) est une suite géométrique.
Est-elle convergente?
- On se place dans le cas où $|u_0| > e$.
 - Si $u_0 > e$, montrer que $u_1 > u_0 > e$ et, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $u_p > u_{p-1} > e$.
 - Si $u_0 < -e$, montrer que $u_1 < u_0 < -e$ et, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $u_p < u_{p-1} < -e$.
Dans ces cas a. b. montrer que $|u_p| \geq |u_0| (\ln |u_0|)^p$.
La suite (u_p) est-elle convergente?