

∞ Baccalauréat C Amiens septembre 1977 ∞

EXERCICE 1

3 POINTS

Déterminer les paires d'entiers naturels $\{a; b\}$ qui vérifient

$$m - 16d = 1977$$

où m est le P.P.C.M. et d le P.G.C.D. des nombres a et b .

EXERCICE 2

5 POINTS

Soit l'application f de $[0; \pi]$ dans \mathbb{R} définie par :

$$f(x) = e^{-x} \sin x.$$

1. Étudier cette fonction. (On désignera par (γ) la courbe représentative que l'on tracera dans un repère orthonormé \mathcal{R}).
2. Démontrer que la courbe (γ) obtenue est tangente à la courbe (\mathcal{C}) représentative de l'application g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que :

$$g(x) = e^{-x}.$$

(On précisera le point de contact).

3. Évaluer l'aire de l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ par rapport au repère \mathcal{R} , tels que :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

PROBLÈME

12 POINTS

Partie A

Le plan vectoriel euclidien orienté E est rapporté à la base orthonormée directe $B = (\vec{i}, \vec{j})$.

On désigne par $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ les droites vectorielles de bases respectives $\vec{i}, \vec{i} + \vec{j}, \vec{j}, \vec{i} - \vec{j}$; par s_1, s_2, s_3, s_4 les symétries vectorielles orthogonales par rapport à ces droites vectorielles; par r la rotation d'angle droit direct; par $\mathbf{1}_E$ l'identité dans E .

$\mathcal{L}(E, E)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E dans E . On rappelle que $(\mathcal{L}(E, E), +, \circ)$ est un anneau unitaire non commutatif et que $(\mathcal{L}(E, E), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.

1. a. Écrire les matrices des applications $\mathbf{1}_E, r, s_1, s_2$ dans la base B . Déterminer les applications $r \circ r$, ainsi que $r \circ s_i$ et $s_i \circ r$ pour $i \in \{1, 2\}$.

b. Soit $f \in \mathcal{L}(E, E)$. On pose :

$$\begin{cases} f(\vec{i}) = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} \\ f(\vec{j}) = \gamma \vec{i} + \delta \vec{j} \end{cases}$$

Montrer qu'il existe un quadruplet unique (a, b, c, d) de \mathbb{R}^4 tel que :

$$(1) \quad f = a \cdot \mathbf{1}_E + b \cdot r + c \cdot s_1 + d \cdot s_2.$$

(On calculera (a, b, c, d) en fonction de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$).

En déduire que $(\mathbf{1}_E, r, s_1, s_2)$ constitue une base de l'espace vectoriel $(\mathcal{L}(E, E), +, \cdot)$.

Quelles sont les coordonnées de s_3 et s_4 dans cette base ?

c. On considère les deux applications de $\mathcal{L}(E, E)$:

$$\begin{cases} f = a \cdot \mathbf{1}_E + b \cdot r + c \cdot s_1 + d \cdot s_2 \\ g = a \cdot \mathbf{1}_E - b \cdot r - c \cdot s_1 - d \cdot s_2 \end{cases}$$

Montrer que $g \circ f = K \cdot \mathbf{1}_E$ où K est un réel que l'on calculera en fonction de a, b, c, d . (On pourra, si on le désire, exprimer les matrices de $f, g, g \circ f$ dans la base B).

Montrer que f est bijective si, et seulement si : $a^2 + b^2 \neq c^2 + d^2$.

Déterminer alors f^{-1} par ses coordonnées dans la base $(\mathbf{1}_E, r, s_1, s_2)$.

d. Comment faut-il choisir a, b, c, d pour que f soit involutive ?

e. On se place dans le cas où $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Montrer que l'on a alors $f \circ f = \lambda f$ où λ est un réel.

2. a. On pose

$$\begin{aligned} \varphi &= a \cdot \mathbf{1}_E + b \cdot r \\ \psi &= c \cdot s_1 + d \cdot s_2 \end{aligned}$$

Lorsque $(a; b)$ décrit \mathbb{R}^2 , φ décrit une partie \mathcal{F} de $\mathcal{L}(E, E)$.

Lorsque $(c; d)$ décrit \mathbb{R}^2 , ψ décrit une partie \mathcal{G} de $\mathcal{L}(E, E)$.

Montrer que \mathcal{F} et \mathcal{G} sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{L}(E, E)$.

b. À quelle condition φ est-elle bijective ? Montrer que φ est alors la composée d'une homothétie et d'une rotation vectorielle.

À quelle condition ψ est-elle bijective ? Comment peut-on alors la décomposer en deux applications simples ?

Partie B

Le plan affine euclidien P, de direction E, est rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Tout point $M(x; y)$ de P peut être considéré comme image d'un nombre complexe $z = x + iy$.

a, b, c, d étant 4 réels, on pose :

$$\begin{aligned} u &= a + ib \\ v &= c + id \end{aligned}$$

et on considère l'application
$$F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto uz + v\bar{z}$$

et l'application \mathcal{T} de \mathbb{P} dans \mathbb{P} qui, au point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe $F(z)$.

On désigne par U et V les images, dans \mathbb{P} , des complexes u et v .

1. Montrer que l'application linéaire associée à \mathcal{T} est l'application f définie par l'égalité (1) en A 1. b.

2. On suppose $u = i$ et $v = 1$. Vérifier que $F \circ F$ est l'application nulle de \mathbb{C} dans \mathbb{C} . Calculer $F(1)$. En déduire $F(i + v)$.

Donner, à partir de la connaissance des points U et V , une construction des points M de \mathbb{P} tels que l'on ait $\mathcal{T}(M) = O$.

On fera une figure représentant l'ensemble de ces points M dans chacun des deux cas : $v \neq -i$; $v = -i$.

3. On suppose $u = i$ et $|v| = \sqrt{2}$. Vérifier que F est involutive.

On désigne par B et C les points d'affixes respectives $1 + i$ et $-1 + i$.

Rechercher, sous forme trigonométrique, les éléments z de \mathbb{C} pour lesquels $F(z) = z$, puis ceux pour lesquels $F(z) = -z$.

En déduire que \mathcal{T} est une symétrie par rapport à la bissectrice de $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OV})$ parallèlement à la bissectrice de $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OV})$.

4. On considère de façon plus particulière l'application :

$$F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto iz + (i - 1)\bar{z}$$

Préciser les éléments de la symétrie \mathcal{T} associée à F