

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C septembre 1981 Amiens ∞

EXERCICE 1

On se propose de résoudre, dans l'ensemble \mathbb{N} , l'équation

$$x^2 - x - 136 = 5s(x),$$

où $s(x)$ représente la somme des chiffres de x exprimée dans le système décimal.

1. Montrer qu'il n'y a pas de solution à un chiffre.
2. Déterminer les solutions à deux chiffres dont le chiffre des dizaines est 1.
3. a. x désignant un entier naturel à deux chiffres dont le chiffre des dizaines est différent de 1, déterminer un encadrement de x . En déduire un encadrement de $x^2 - x - 136$.
b. Majorer $s(x)$ et montrer qu'il n'y a pas de solution à deux chiffres dont le chiffre des dizaines est différent de 1.
4. Par une méthode analogue au 3., montrer qu'il n'y a pas de solution à n chiffres pour $n \geq 3$.

EXERCICE 2

Soit f l'application de \mathbb{R}_+ vers \mathbb{R} définie par :

$$\begin{cases} x \longmapsto x^2 \ln x & \text{pour } x > 0 \\ 0 \longmapsto 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}_+ . f est-elle dérivable en 0?
2. Étudier f et tracer sa représentation graphique (C) dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 6 cm).
3. On désigne par α un nombre réel strictement positif; calculer l'intégrale définie par :

$$A(\alpha) = \int_1^\alpha f(x) dx.$$

En déduire l'aire en cm^2 , du domaine (D) du plan défini par :

$$(D) = \{M(x; y), 0 \leq x \leq 1 \text{ et } f(x) \leq y \leq 0\}.$$

PROBLÈME

Soit E un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Pour tout réel λ on définit l'application affine, f_λ qui à tout point $M(x; y; z)$ de E associe le point $M_1(x_1; y_1; z_1)$ tel que

$$\begin{cases} x_\lambda = (1 - \lambda)x + 3\lambda z + 2\lambda \\ y_\lambda = (1 - \lambda)y + 2\lambda z + \lambda \\ z_\lambda = z. \end{cases}$$

Partie A

1. Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles f_λ est bijective.
2. Montrer que, pour λ non nul, f_λ admet un ensemble, D de points invariants que l'on caractérisera. Quelle est la nature de f_0 ?
3. Montrer que f_1 est une projection affine que l'on déterminera par ses éléments caractéristiques.
4. Démontrer que, pour tout λ réel et pour tout M de E , le vecteur $\overrightarrow{MM_\lambda}$ appartient à un plan vectoriel \mathcal{P} dont on donnera une base.
Comparer $\overrightarrow{M_1M}$ et $\overrightarrow{MM_\lambda}$; en déduire une construction de M_λ .
5. On désigne par \mathcal{F} l'ensemble des applications f_λ bijectives.
Montrer que \mathcal{F} est un groupe commutatif pour la loi \circ de composition des applications.

Partie B

On désigne par P le plan affine de repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que $f_\lambda(P) \subset P$, pour tout λ réel. En déduire que, pour $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$, la restriction de f_λ au plan P est une homothétie de centre $A(2; 1)$ dont on déterminera le rapport.
2. Dans P , on considère la courbe C d'équation

$$x^2 + 4y^2 - 2x - 8y + 4 = 0.$$

Montrer que C est une conique dont on déterminera les sommets et le centre.

3. Pour tout k réel non nul, on note C_k l'image de C par l'homothétie, H de centre A et de rapport k .
Déterminer une équation cartésienne de C_k et en déduire sa nature.
4. Montrer qu'il existe une valeur k_0 , et une seule, de k pour laquelle C_k passe par O ; en déduire que C_k a pour équation,

$$x^2 + 4y^2 - 8y = 0.$$

Représenter C et C_k sur un même graphique.

Partie C

Dans le plan P , on considère le point mobile M , dont les coordonnées à tout instant t supérieur ou égal à zéro, sont données dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ par

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos[\pi \text{Log}(t+1)] \\ y(t) = 1 + \sin[\pi \text{Log}(t+1)]. \end{cases}$$

1. **a.** Montrer que la trajectoire du mobile M est la courbe C_{k_0} du B 4, et qu'à l'instant $t_0 = 0$ le mobile est en A.
 - b.** Calculer les coordonnées du vecteur-vitesse, $\overrightarrow{V}(t)$, et du vecteur-accélérateur, $\overrightarrow{\Gamma}(t)$, du mobile M à l'instant t .
2. On désigne par t_1 la date du premier passage du mobile M en A, par t_2 , la date de son deuxième passage en A et, d'une manière générale, par t_n la date de son n -ième passage en A. Calculer t_n en fonction de l'entier naturel n .
En déduire $\overrightarrow{V}_n = \overrightarrow{V}(t_n)$ et $\overrightarrow{\Gamma}_n = \overrightarrow{\Gamma}(t_n)$.

3. On considère les suites (a_n) , (b_n) , (c_n) et (d_n) , définies pour tout n , entier naturel, par

$$a_n = \overrightarrow{V}_n \cdot \vec{i}, b_n = \overrightarrow{V}_n \cdot \vec{j}, c_n = \overrightarrow{\Gamma}_n \cdot \vec{i}, d_n = \overrightarrow{\Gamma}_n \cdot \vec{j}.$$

Montrer que ce sont quatre suites géométriques dont on donnera les éléments caractéristiques.

En déduire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \overrightarrow{V}_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \overrightarrow{\Gamma}_n.$$

4. Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle le temps mis par le mobile entre le n -ième et le $(n + 1)$ -ième passages en A est supérieur à 100.

N. B. - La partie C est indépendante des parties A et B.