

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C septembre 1982 Amiens ∞

PROBLÈME

14 points

1. Soit \mathcal{F} l'espace vectoriel des applications numériques définies sur \mathbb{R} , et indéfiniment dérivables sur \mathbb{R} .

On donne les quatre éléments de \mathcal{F} , définis pour tout x de \mathbb{R} par :

$$f_1(x) = xe^x ; \quad f_2(x) = e^x ; \quad f_3(x) = xe^{-x} ; \quad f_4(x) = e^{-x}.$$

On appelle \mathcal{E} le sous-espace vectoriel de \mathcal{F} , engendré par la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) .

- a. Soit f , l'élément de \mathcal{E} , égal à $af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

Montrer que la dérivée d'ordre n , de f , qu'on note $f^{(n)}$, est définie par

$$f^{(n)}(x) = [a(x+n) + b]e^x + (-1)^n [c(x-n) + d]e^{-x}.$$

(Il est conseillé d'utiliser ce résultat dans la suite du problème.)

- b. Montrer que \mathcal{E} est de dimension 4. (On pourra utiliser le fait que, si $af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4$ est l'application nulle 0, ses trois premières dérivées sont nulles).
2. a. Étudier les variations de l'application f , définie sur \mathbb{R} , par

$$f(x) = (4x - 6)e^x + (2x + 1)e^{-x} - x^2 + x - 5.$$

(Pour l'étude des branches infinies de la courbe représentative (C) on fera seulement une étude précise des limites de f en $+\infty$, et en $-\infty$.)

Donner une allure de la courbe (C) , dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormé.

- b. Évaluer l'aire géométrique de la portion de (P) comprise entre la courbe (C) et les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.

On recherchera une primitive de f en utilisant le 2. a.).

3. On appelle G , l'application de \mathcal{F} dans \mathcal{F} définie par :

$$G(f) = f'' - 2f' + f.$$

Montrer que G est un endomorphisme de \mathcal{F} .

Soit h un élément tel que $G(h) = 0$, et g l'élément de \mathcal{F} défini par $g(x) = e^{-x} \cdot h(x)$.

Évaluer la dérivée seconde de g , en déduire que g est une application affine, puis que $\{f \in \mathcal{F}; G(f) = 0\}$ est le plan vectoriel de base (f_1, f_2) .

4. On appelle G_1 la restriction de G à l'ensemble de départ \mathcal{E} .

- a. Montrer que G_1 est un endomorphisme de \mathcal{E} .

- b. Déterminer $\{f \in \mathcal{E}; G_1(f) = 0\}$ et $\{g \in \mathcal{E}; g = G_1(f), f \in \mathcal{E}\}$.

- c.** Soit l'application $f_5 = 8f_3 - 4f_4$.
Trouver un élément f_0 du plan engendré par f_3 et f_4 tel que $\mathcal{G}_1(f_0) = f_5$.
- d.** Trouver une application polynôme, p_0 , du second degré, telle que, $G(p_0) = p$, p étant l'application polynôme définie par $p(x) = x^2 + 5x - 9$.
- e.** Prouver que l'ensemble $S = \{f \in \mathcal{F} / G(f) = f_5 + p\}$ est non vide et le déterminer.
- f.** Déterminer l'élément f de S , tel que $f(0) = -10$ et $f'(0) = 0$.