# ∽ Baccalauréat C Antilles-Guyane juin 1987 ∾

**EXERCICE 1** **4 POINTS**

Soit $f_1$ la fonction numérique de la variable $x$, définie sur $R^-$ par :

$$f_1(x) = x - \sqrt[3]{3x}$$

et soit $f_2$ la fonction numérique de la variable $x$, définie sur $R^+$ par :

$$f_2(x) = x + \sqrt[3]{3x}.$$

1. Étudier les fonctions $f_1$ et $f_2$.
   Tracer leurs courbes représentatives $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
   On précisera en particulier les tangentes à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ au point O.
2. Soit $h$ la fonction numérique de la variable $x$, définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$h(x) = x + \sqrt[3]{3|x|}.$$

   Montrer que sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ est la réunion de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
   La droite d'équation $y = x + 1$ coupe la courbe $\mathcal{C}$ en deux points A et B. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par le segment [AB] et les arcs $\overset{\frown}{\text{OA}}$ et $\overset{\frown}{\text{OB}}$ de la courbe $C$.

**EXERCICE 2** **4 POINTS**

Pour tout nombre complexe $z$, on pose :

$$f(z) = z^3 - (16 - \text{i})z^2 + (89 - 16\text{i})z + 89\text{i}.$$

1. Montrer que l'équation $f(z) = 0$ possède une racine imaginaire pure, $a$, que l'on déterminera.
2. Démontrer qu(il existe deux nombres réels $p$ et $q$ tels que :

   $$f(z) = (z - a)\left(z^2 + pz + q\right).$$

   Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(z) = 0$.
3. On note P le plan complexe muni d'un repère orthonormé et $a$, $z_1$ (de partie imaginaire positive) et $z_2$ les solutions de l'équation $f(z) = 0$.
   Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a$, $z_1$ et $z_2$. Quelle est la nature du triangle ABC ?
4. Déterminer et représenter l'ensemble E des points $M$ du plan $P$ tels que :

   $$M\text{A}^2 + M\text{B}^2 - M\text{C}^2 = 20.$$

   Montrer que E contient le point A et le point C.

**PROBLÈME** **12 POINTS**

On se propose dans ce problème d'étudier l'ensemble, noté $\sum$, des points de l'espace équidistants de deux droites D et D$'$ non coplanaires et orthogonales.
Les parties A, B, C pourront être traitées de façon indépendante.

**A.**

1. **a.** Donner la condition nécessaire et suffisante pour qu'une symétrie orthogonale, $s$, par rapport à un plan (réflexion) laisse invariante une droite donnée.

   En déduire qu'il existe deux symétries orthogonales par rapport à un plan seulement qui laissent simultanément invariant les droites D et D$'$ :

   l'une par rapport à un plan passant par D et orthogonal à D$'$ en B,

   l'autre par rapport à un plan passant par D$'$ et orthogonal à D en A.

   **b.** Montrer que $\sum$ admet, en particulier, deux plans de symétries et un axe de symétrie (AB).

2. Montrer que l'intersection de $\sum$ avec l'un quelconque de ses plans de symétrie est une parabole dont on précisera le foyer et la directrice.

**B.** Dans cette partie, ainsi que dans la partie C, l'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$.

La droite D passe par le point A de coordonnées $(0~;~0~;~1)$ et admet comme vecteur directeur $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$.
La droite D$'$ passe par le point B de coordonnées $(0~;~0~;~-1)$ et admet comme vecteur directeur $\vec{v}$ tel que $\vec{v} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$.

1. **a.** Vérifier que les droites D et D$'$ sont orthogonales et non coplanaires.

   Montrer que le point O appartient à $\sum$.

   **b.** Montrer qu'une représentation paramétrique de D est :

   $$\left\{\begin{array}{l c l}x &=& t\\ y &=& t\\ z &=& 1\end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}.$$

   Soit $M$ un point de coordonnées $(x~;~y~;~z)$ et $P$ un point de D, exprimer $MP^2$. En considérant $MP^2$ comme une fonction de $t$, en déduire la distance de $M$ à D.

   **c.** Calculer de même la distance du point $M$ à la droite D$'$.

   **d.** En déduire que $M$ appartient à $\sum$ si et seulement si on a : $xy + 2z = 0$.

2. Déduire de cette relation :

   **a.** que les intersections de $\sum$ avec des plans orthogonaux à la droite (AB) sont en général des hyperboles.

   Préciser les cas d'exception.

   **b.** la nature des intersections de $\sum$ avec des plans orthogonaux à l'axe $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath}\right)$ ou à l'axe $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\jmath}\right)$.

**C.** Soit $M(t)$ le point de $\sum$ admettant comme abscisse $x(t) = 4\cos t$ et pour ordonnée $y(t) = \sin 2t$ dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$.
Lorsque $t$ varie dans $\mathbb{R}$, le point $M$ décrit la courbe $\Gamma$ incluse dans $\sum$.

1. Construire la courbe $\Gamma_z$ projection orthogonale de $\Gamma$ sur le plan d'équation $z = 0$.

   On prendra 2 cm comme unité.

2. On désigne par $\Gamma_x$ la projection orthogonale de $\Gamma$ sur le plan d'équation $x = 0$ et par la projection orthogonale de $\Gamma_x$ sur le plan d'équation $y = 0$.

   Construire ces courbes après avoir donné une représentation paramétrique de chacune d'elles.

   Un étude préalable de leurs éventuels éléments de symétrie facilitera leur étude et leur construction.