Baccalauréat S Antilles-Guyane juin 2000

Exercice 1 **4 points**

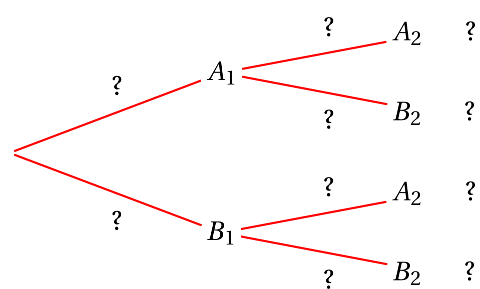
Un groupe de vingt-deux personnes décide d'aller au cinéma deux samedis de suite pour voir deux films A et B.
Le premier samedi, huit personnes vont voir le film A, et les autres vont voir le film B.
Le deuxième samedi, quatre personnes décident de revoir le film A, deux vont revoir le film B, et les autres vont voir le film qu'elles n'ont pas vu la semaine précédente.
Après la deuxième séance, on interroge au hasard une personne de ce groupe. On considère les évènements suivants :
A_1 « la personne interrogée a vu le film A le premier samedi » ;
A_2 « la personne interrogée a vu le film A le deuxième samedi » ;
B_1 « la personne interrogée a vu le film B le premier samedi » ;
B_2 « la personne interrogée a vu le film B le deuxième samedi ».

1. **a.** Calculer les probabilités suivantes : $p(A_1)$ et $p(A_2)$.

   b. Calculer les probabilités de chacun des évènements suivants :

$$p(A_2/A_1),\ p(A_2/B_1) \text{ et } p(A_1 \cap A_2)$$

   c. Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante. Aucune justification n'est demandée pour cette question.



   d. Retrouver à partir de l'arbre pondéré que $p(A_2) = \dfrac{8}{11}$.

2. Le prix du billet pour le film A est de 30 F et de 20 F pour le film B.
   On appelle X la variable aléatoire égale au coût total, pour la personne interrogée, des deux séances de cinéma.

   a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

   b. Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Exercice 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

1. Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$.

a. Calculer $P(-1)$.

b. Déterminer les réels a et b tels que pour tout nombre complexe z, on ait :

$$P(z) = (z+1)\left(z^2 + az + b\right).$$

c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$. (Unité graphique : 2 cm.) On désigne par A, B, C et G les points du plan d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = -1,\ z_{\text{B}} = 2 + \text{i}\sqrt{3},\ z_{\text{C}} = 2 - \text{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_{\text{G}} = 3.$$

a. Réaliser une figure et placer les points A, B, C et G.

b. Calculer les distances AB, BC et AC. En déduire la nature du triangle ABC.

c. Calculer un argument du nombre complexe $\dfrac{z_{\text{A}} - z_{\text{C}}}{z_{\text{G}} - z_{\text{C}}}$. En déduire la nature du triangle GAC.

3. Soit (D) l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left(-\overrightarrow{M\text{A}} + 2\overrightarrow{M\text{B}} + 2\overrightarrow{M\text{C}}\right)\cdot\overrightarrow{\text{CG}} = +12 \quad (1)$$

a. Montrer que G est le barycentre du système de points pondérés

$$\{(\text{A},\ -1)\ ;\ (\text{B},\ 2)\ ;\ (\text{C},\ 2)\}.$$

b. Montrer que la relation (1) est équivalente à la relation $\overrightarrow{\text{G}M}.\overrightarrow{\text{CG}} = -4 \quad (2)$.

c. Vérifier que le point A appartient à l'ensemble (D).

d. Montrer que la relation (2) est équivalente à la relation $\overrightarrow{\text{A}M}.\overrightarrow{\text{GC}} = 0$.

e. En déduire l'ensemble (D) et le tracer.

Exercice 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Les points $A_0 = \text{O}$; A_1 ; … ; A_{20} sont les sommets d'un polygone régulier de centre A, à 21 côtés, de sens direct.

Les points $B_0 = \text{O}$; B_1 ; B_{14} sont les sommets d'un polygone régulier de centre B, à 15 côtés, de sens direct.

Soit r_{A} la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{2\pi}{21}$ et r_{B} la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{2\pi}{15}$.

On définit la suite (M_n) de points par :

— M_0 est l'un des points $A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{20}$;

— pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = r_{\text{A}}(M_n)$.

On définit la suite (P_n) de points par :

— P_0 est l'un des points $B_0,\ B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_{14}$

— pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = r_{\text{B}}(P_n)$.

Le but de l'exercice est de déterminer, pour deux cas particuliers, l'ensemble S des entiers naturels n vérifiant :

$$M_n = P_n = \text{O}.$$

1. Dans cette question, $M_0 = P_0 = \text{O}$.
   a. Indiquer la position du point $M_{2\,000}$ et celle du point $P_{2\,000}$.
   b. Déterminer le plus petit entier naturel n non nul tel que $M_n = P_n = \text{O}$.
   En déduire l'ensemble S.
2. Dans cette question, $M_0 = A_{19}$ et $P_0 = B_{10}$.
   On considère l'équation $(E) : 7x - 5y = 1$ avec $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$.
   a. Déterminer une solution particulière $(a~;~b)$ de (E).
   b. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).
   c. En déduire l'ensemble S des entiers naturels n vérifiant $M_n = P_n = O$.

Problème **11 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln\left(x^2\right) - 2x.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$; unité graphique : 1 cm.

Partie A - Étude de *f*

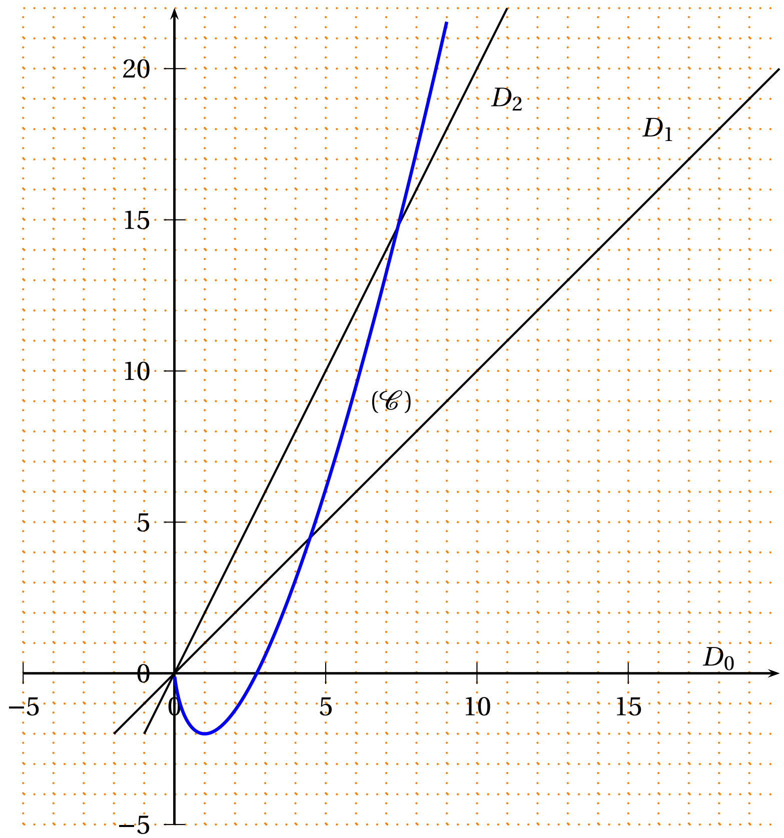
1. Montrer que, pour $x > 0$, $f(x) = 2x\ln x - 2x$ puis que $f(x) = 2x\ln\dfrac{x}{\text{e}}$.
2. **a.** Étudier la limite de f en $+\infty$.
   b. Montrer que f est dérivable en tout $x > 0$; calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.
   c. Étudier le sens de variation de f sur $]0~;~+\infty[$.
   d. Donner le tableau de variation de f sur $]0~;~+\infty[$.
3. Déterminer par le calcul l'abscisse du point d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet sur l'intervalle $[1~;~5]$ une unique solution et en donner la valeur décimale arrondie à 10^{-2}.

Partie B - Calcul d'aires

1. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$\left\{\begin{array}{lcl} F(0) & = & 0 \\ F(x) & = & x^2\ln x - 2 - \dfrac{3x^2}{2} \quad \text{si} \quad x > 0 \end{array}\right.$$

   a. On admet que $\lim\limits_{x \to 0} x\ln x = 0$; montrer que F est dérivable en 0 et préciser $F'(0)$.
   b. Montrer que, pour tout x appartenant à $]0~;~+\infty[$, $F'(x) = f(x)$.
2. On considère pour chaque entier n positif ou nul, la droite D_n d'équation $y = nx$.
   On trouvera ci-dessous un tracé de la courbe $(\mathscr{C})$ et des droites D_0, D_1, D_2.



a. Déterminer les coordonnées du point I_n, d'abscisse strictement positive, intersection de $(\mathscr{C})$ et de D_n.

On appelle P_n le point de l'axe des abscisses de même abscisse que I_n. Placer les points I_0, I_1, I_2, P_0, P_1, P_2 sur la figure donnée en annexe.

b. Déterminer la position relative de $(\mathscr{C})$ et de D_n pour les abscisses appartenant à $]0\,;\,+\infty[$.

3. Pour tout $n \geqslant 1$, on considère le domaine A_n situé dans le quart de plan défini par $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, délimité par $(\mathscr{C})$, D_{n-1} et D_n.

On note a_n son aire, exprimée en unités d'aire.

a. Faire apparaître les domaines A_1 et A_2 sur la figure.

b. Calculer l'aire t_n du triangle $\mathrm{O}P_nI_n$, en unités d'aire.

c. Calculer l'aire u_n, en unités d'aire, du domaine situé dans le quart de plan défini par $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, délimité par $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses, et les parallèles à l'axe des ordonnées passant par P_0 et P_n.

d. Vérifier que l'aire v_n en unités d'aire, du domaine situé dans le quart de plan défini par $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, délimité par $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et D_n, est $v_n = t_n - u_n = \mathrm{e}^2\left(\mathrm{e}^n - 1\right)$.

e. Calculer alors a_n.

4. Montrer que la suite (a_n) est une suite géométrique.

En préciser la raison et le premier terme.