

☪ Baccalauréat S Antilles-Guyane septembre 2008 ☪

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

Certains résultats de la PARTIE A pourront être utilisés dans la PARTIE B, mais les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

PARTIE A :

On définit :

- la suite (u_n) par : $u_0 = 13$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$.
- la suite (S_n) par : pour tout entier naturel n , $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$.
En déduire la limite de la suite (u_n) .
2.
 - a. Déterminer le sens de variation de la suite (S_n) .
 - b. Calculer S_n en fonction de n .
 - c. Déterminer la limite de la suite (S_n) .

PARTIE B :

Étant donné une suite (x_n) , de nombres réels, définie pour tout entier naturel n , on considère la suite

(S_n) définie par $S_n = \sum_{k=0}^n x_k$.

Indiquer pour chaque proposition suivante si elle est vraie ou fausse.

Justifier dans chaque cas.

Proposition 1 : si la suite (x_n) est convergente, alors la suite (S_n) l'est aussi.

Proposition 2 : les suites (x_n) et (S_n) ont le même sens de variation.

EXERCICE 2

5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

1. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, l'équation d'inconnue z :

$$z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0.$$

2. On considère les points A d'affixe $z_A = \sqrt{3} - i$, B d'affixe $z_B = \sqrt{3} + i$ et C le milieu de [OB] d'affixe z_C .
 - a. Déterminer la forme exponentielle de z_A , z_B et z_C .
 - b. Sur une figure, placer les points A, B et C, en prenant 2 cm pour unité.
 - c. Montrer que le triangle OAB est équilatéral.
3. Soit D l'image de C par la rotation r de centre O, d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et E l'image de D par la translation t de vecteur $2\vec{v}$.
 - a. Placer les points D et E sur une figure.
 - b. Montrer que l'affixe z_E du point E vérifie : $z_E = \frac{1}{2}[1 + i(4 - \sqrt{3})]$.

- c. Montrer que $OE = BE = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$.
4. Montrer que les points A, C et E sont alignés.
Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

EXERCICE 2**5 points****Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité****PARTIE A :**

On considère le système de congruences :

$$(S) \begin{cases} n \equiv 2 \pmod{3} \\ n \equiv 1 \pmod{5} \end{cases}, \text{ où } n \text{ désigne un entier relatif.}$$

1. Montrer que 11 est solution de (S).
2. Montrer que si n est solution de (S) alors $n - 11$ est divisible par 3.
3. Montrer que les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme $11 + 15k$, où k désigne un entier relatif.

PARTIE B :Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .On considère l'application f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe z' et g celle qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe z'' définies par :

$$z' = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}z \quad \text{et} \quad z'' = e^{i\frac{\pi}{5}}z.$$

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques des applications f et g .
2. On considère les points A_0 et B_0 d'affixes respectives $a_0 = 2e^{-2i\frac{\pi}{3}}$ et $b_0 = 4e^{-i\frac{\pi}{5}}$.
Soient (A_n) et (B_n) les suites de points définies par les relations de récurrences :

$$A_{n+1} = f(A_n) \quad \text{et} \quad B_{n+1} = g(B_n).$$

On note a_n et b_n les affixes respectives de A_n et B_n .

- a. Quelle est la nature de chacun des triangles OA_nA_{n+1} ?
 - b. En déduire la nature du polygone $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$.
- a. Montrer que les points B_n sont situés sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
 - b. Indiquer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OB_n}, \overrightarrow{OB_{n+2}})$.
 - c. En déduire la nature du polygone $B_0B_2B_4B_6B_8$.
- a. Exprimer a_n et b_n en fonction de n .
 - b. Montrer que les entiers n pour lesquels les points A_n et B_n sont simultanément sur l'axe des réels sont les solutions du système (S) de la PARTIE A.

EXERCICE 3**7 points****Commun à tous les candidats**Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}.$$

On désigne par \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 2 cm.

1. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
b. Démontrer que la droite \mathcal{D}_1 d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe \mathcal{C} .
c. Étudier la position de \mathcal{C} par rapport à \mathcal{D}_1 .
2. a. On note f' la fonction dérivée de f . Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout réel x , on a :

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3} \right)^2$$

- b. Étudier les variations de f sur \mathbb{R} et dresser le tableau de variations de la fonction f .
3. a. Que peut-on dire de la tangente \mathcal{D}_2 à la courbe \mathcal{C} au point I d'abscisse $\ln 3$?
b. En utilisant les variations de la fonction f , étudier la position de la courbe \mathcal{C} par rapport à \mathcal{D}_2 .
4. a. Montrer que la tangente \mathcal{D}_3 à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = \frac{1}{4}x + 1$.
b. Étudier la position de la courbe \mathcal{C} par rapport à la tangente \mathcal{D}_3 sur l'intervalle $] -\infty ; \ln 3]$.
On pourra utiliser la dérivée seconde de f notée f'' définie pour tout x de \mathbb{R} par :

$$f''(x) = \frac{12e^x(e^x - 3)}{(e^x + 3)^3}.$$

5. On admet que le point I est centre de symétrie de la courbe \mathcal{C} .
Tracer la courbe \mathcal{C} , les tangentes \mathcal{D}_3 , \mathcal{D}_3 et les asymptotes à la courbe \mathcal{C} . On rappelle que l'unité graphique choisie est 2 cm.
6. a. Déterminer une primitive de la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = \frac{e^x}{e^x + 3}$.
b. Soit λ un réel strictement négatif.
On note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par \mathcal{D}_1 , \mathcal{C} et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 0$.
Montrer que $\mathcal{A}(\lambda) = 4 \ln 4 - 4 \ln(e^\lambda + 3)$.
c. Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

EXERCICE 4

4 points

Commun à tous les candidats

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 .

L'urne U_1 contient 2 billes vertes et 8 billes rouges toutes indiscernables au toucher.

L'urne U_2 contient 3 billes vertes et 7 billes rouges toutes indiscernables au toucher.

Une partie consiste, pour un joueur, à tirer au hasard une bille de l'urne U_1 , noter sa couleur et remettre la bille dans l'urne U_1 puis de tirer au hasard une bille de l'urne U_2 , noter sa couleur et remettre la bille dans l'urne U_2 .

À la fin de la partie, si le joueur a tiré deux billes vertes il gagne un lecteur MP3. S'il a tiré une bille verte, il gagne un ours en peluche. Sinon il ne gagne rien.

On note

V_1 l'évènement : « le joueur tire une boule verte dans U_1 »

V_2 l'évènement : « le joueur tire une boule verte dans U_2 ».

Les évènements V_1 et V_2 sont indépendants.

1. Montrer, à l'aide d'un arbre pondéré, que la probabilité de gagner un lecteur MP3 est $p = 0,06$.
2. Quelle est la probabilité de gagner un ours en peluche ?
3. Vingt personnes jouent chacune une partie. Déterminer la probabilité que deux d'entre elles exactement gagnent un lecteur MP3.
On justifiera la réponse et on donnera une valeur approchée du résultat à 10^{-4} près.
4. On appelle n le nombre de personnes participant à la loterie un jour donné et jouant une seule fois.
On note p_n la probabilité que l'une au moins de ces personnes gagne un lecteur MP3.
Déterminer la plus petite valeur de n vérifiant $p_n \geq 0,99$.