

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C & E Antilles juin 1969 ∞

EXERCICE 1

Soit, dans le corps des complexes,

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad k = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1. Placer leurs images dans le plan complexe et démontrer que :
 - a. les racines de l'équation $x^3 - 1 = 0$ sont $1, j, k$.
 - b. $k = j^2$ et $j = k^2$.
2. Montrer que l'ensemble $E = \{1; j; k\}$ est un sous-groupe du groupe multiplicatif des nombres complexes non nuls.

EXERCICE 2

Résoudre, dans le corps des réels, l'équation

$$4^x - 3 \times 2^{x+2} - 2^6 = 0.$$

PROBLÈME

Partie A

Le plan est rapporté au système d'axes quelconques $x'Ox$ et $y'Oy$. On étudie la transformation plane \mathcal{T} définie par le système

$$M(x; y) \longmapsto M'(X; Y),$$

$$\begin{cases} X = x - y, \\ Y = 2x - y. \end{cases}$$

1. Montrer que \mathcal{T} est une bijection et admet un point invariant.
2. S étant la symétrie de centre 0, \mathcal{I} la transformation identique et 'G-I la transformation réciproque de \mathcal{T} , montrer que

$$\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{T} \circ S = S \circ \mathcal{T}.$$

Montrer que $\mathcal{T}, \mathcal{T}^2 = \mathcal{T} \circ \mathcal{T}, \mathcal{T}^3 = \mathcal{T} \circ \mathcal{T} \circ \mathcal{T}$ et $\mathcal{T}^4 = \mathcal{T} \circ \mathcal{T} \circ \mathcal{T} \circ \mathcal{T}$ forment un groupe commutatif pour la loi de composition des transformations planes; établir la table de cette loi.

3. Étudier la transformée par \mathcal{T} d'une droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$.
Vérifier qu'il n'existe aucune droite parallèle à sa transformée.
Quelles sont les transformées de droites parallèles aux axes de coordonnées?

4. On pose :

$$X = \operatorname{tg} \beta \quad \text{et} \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Calculer $\frac{Y}{X}$ en fonction de α . Étudier et représenter les variations de la fonction f :

$$\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2} \right[, \quad f(\alpha) = \frac{Y}{X}.$$

Représenter les variations de la fonction dans un repère à axes perpendiculaires.

5. Soit l'ensemble (H) des points $M(x; y)$, d'équation

$$(x-2)(y-1) = 1.$$

Construire (H) . Trouver l'équation du transformé de (H) .

Par un changement de repère, ramener cette équation à $X_1 \times Y_1 = 1$ et construire le transformé.

Partie B

Le plan est maintenant rapporté à un système d'axes orthonormé.

1. La transformation \mathcal{T} est-elle une isométrie? Trouver l'ensemble des points M du plan tels que $OM = OM'$.

Trouver l'ensemble des points M du plan tels que les directions OM et OM' soient perpendiculaires.

2. Étudier la courbe transformée du cercle de centre O et de rayon $R = \sqrt{5}$.

(On pourra considérer une équation explicite

$$Y = A \left[X \pm \sqrt{B - X^2} \right].$$

N. B. - Les questions sont indépendantes les unes des autres.