Baccalauréat C Antilles–Guyane juin 1971

EXERCICE 1

Un nombre entier naturel N s'écrit $\overline{abc0}$ en base 5, et $\overline{abc}$ en base 12, où a, b et c sont des entiers tels que

$$0 < a < 5, \quad 0 \leqslant b < 5, \quad 0 \leqslant c < 5.$$

Déterminer les entiers a, b, c et N. (On pourra utiliser la congruence modulo 4).

EXERCICE 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(-4-2\text{i})z^2 + (7-\text{i})z + 1 + 3\text{i} = 0$$

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de chaque racine.

PROBLÈME

Soit E l'ensemble des fonctions numériques définies sur l'intervalle $]-2\ ;\ +2[$. On rappelle que E, muni de l'addition, et de la multiplication externe par les réels, ainsi définies :

$$\begin{array}{llll} f+g : & x \longmapsto & f(x)+g(x) & \text{pour tout} \quad (f,\ g) \in \text{E} \times \text{E} \\ \lambda f : & x \longmapsto & \lambda(x) & \text{pour tout} \quad (\lambda,\ f) \in \mathbb{R} \times \text{E} \end{array}$$

est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par les deux fonctions f_1, f_2, ainsi définies :

$$f_1(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}, \quad f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$\text{pour tout } x \in\ ]-2\ ;\ +2[.$$

Montrez que $\left(f_1\ ;\ f_2\right)$ est une base de F.

2. Soit P le plan vectoriel euclidien orienté et soit $\left(\vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\right)$ une base orthonormée directe de P.

On désigne par T l'ensemble des transformations orthogonales de P, dont la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$,relativement à la base $\left(\vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\right)$, vérifie $(a-b)^2 = 1$.

Déterminer tous les éléments de T (préciser les angles de rotation, et les axes de symétries).

3. Soit φ l'endomorphisme de F, dont la matrice par rapport à la base $\left(f_1\ ;\ f_2\right)$ est la matrice A, représentant la rotation vectorielle d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$ dans P, par rapport à la base $\left(\vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\right)$.
Déterminer l'image par φ de la fonction $g = 2f_1 + f_2$.
Étudier la fonction numérique : $x \longmapsto f(x) = \sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$.
Tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé. En déduire le tracé de la courbe $(\mathscr{C})$ d'équation

$$x\left(y^2+1\right)+2\left(y^2-1\right)=0.$$

Etudier la limite de $\dfrac{f'x)}{x-2}$ lorsque x tend vers 2. La courbe $(\mathscr{C})$ possède-t-elle une tangente au point $(2\,;\,0)$?

4. Écrire l'équation de la tangente D à la courbe $(\mathscr{C})$, au point d'abscisse $x = 1$, et d'ordonnée $y > 0$. Déterminer l'intersection de $(\mathscr{C})$ et de la droite D. Préciser la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite D.