Durée : 4 heures

Baccalauréat C juin 1982 Antilles–Guyane

Exercice 1

On considère l'expression

$$f(z) = z^3 - (1+14\text{i})z^2 - 2z(29-\text{i}) + 68\text{i}$$

où z est un nombre complexe.

1. Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure que l'on notera a. Montrer qu'il existe des coefficients complexes b et c tels que

$$f(z) = (z-a)(z-b)(z-c).$$

   En déduire les autres solutions de l'équation. On notera b la solution dont la partie réelle est négative, c l'autre.

2. Soit A, B, C, les images des nombres complexes a, b, c dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé.
   Déterminer les éléments géométriques de la similitude directe laissant A invariant et transformant B en C.

Exercice 1

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par

$$f(x) = -x^3 + x^3 \text{Log}\, x.$$

1. Étudier la fonction f et construire sa courbe représentative C dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé.
2. Soit a un nombre strictement positif et strictement inférieur à e. En utilisant une intégration par parties, trouver l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations $x = a$ et $x = \text{e}$.
   Cette aire admet-elle une limite lorsque a tend vers 0 ? La déterminer si elle existe.

Problème

Partie A

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $\text{B} = \left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ une base orthonormée directe de E.

1. Soit φ, l'endomorphisme de E défini par

$$\varphi\left(\overrightarrow{\imath}\right) = j \quad ; \quad \varphi\left(\overrightarrow{\jmath}\right) = -\overrightarrow{\imath} \quad ; \quad \varphi\left(\overrightarrow{k}\right) = -\overrightarrow{k}.$$

   Démontrer que φ est une isométrie vectorielle de E. Déterminer l'ensemble des vecteurs invariants par φ.
2. Montrer' que $\varphi \circ \varphi$ est une symétrie vectorielle orthogonale par rapport à une droite D que l'on déterminera.
3. Soit P le plan vectoriel orthogonal à D. On appelle σ la symétrie vectorielle orthogonale par rapport au plan P.

   Montrer que $\varphi = r \circ \sigma = \sigma \circ r$ où r est une rotation vectorielle dont on déterminera les éléments.

   On précisera l'orientation choisie pour la mesure de l'angle.

Partie B

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien associé à E, rapporté au repère orthonormé direct R = $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$. On considère les points. O$'$, A, B$'$ de $\mathscr{E}$ dont les coordonnées dans R sont :

$$\text{O}'(a ; 0 ; a) \quad \text{A}(a ; 0 ; 0) \quad \text{B}'(0 ; 0 ; a)$$

où a est un réel strictement positif.
Soit f l'application affine de $\mathscr{E}$ dont l'endomorphisme associé est φ et qui transforme O en O$'$.

1. Définir analytiquement f. Préciser les coordonnées des points A$'$ et B tels que

$$\text{A}' = f(\text{A}), \text{B}' = f(\text{B}).$$

   Montrer qu'il existe un seul point invariant I par f.
2. En utilisant A 3., montrer qu'il existe deux isométries affines h et g, non égales à l'identité de $\mathscr{E}$, telles que

$$f = h \circ g = g \circ h$$

   Donner la nature et les éléments caractéristiques de h et de g.
3. Soit ℓ un réel strictement positif. On note $\mathscr{P}$ le plan passant par I de direction P et C$_\ell$ l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que

$$\left\|\overrightarrow{Mf(M)}\right\| = 1.$$

   Montrer que C$_\ell$, est globalement invariant par f. Montrer que l'intersection de C$_\ell$ et $\mathscr{P}$ est un cercle dont on précisera les coordonnées du centre et le rayon.

4. On note G l'ensemble des points M de $\mathscr{C}$ tels que

$$\overrightarrow{\text{O}M} \cdot \overrightarrow{\text{O}f(M)} = 0.$$

Montrer qu'une équation de G dans $\mathbb{R}$ est

$$ax - z^2 + az = 0.$$

Montrer que l'intersection de G et du plan d'équation $y = 0$ est une parabole dont on déterminera le sommet et l'axe de symétrie.

Construire cette parabole dans le cas où $a = 4$.

Partie C

On considère les triplets F = {O ; A ; B} et F' = {O′ ; A′ ; B′}.
On se propose de déterminer l'ensemble Q des isométries affines de $\mathscr{E}$ qui transforment F en F′.

1. Montrer que Q est non vide.

2. Soit q un élément de Q.

a. Montrer que $q(0) = \text{O}'$.

b. Déterminer l'image par q du milieu du bipoint (A, B).

c. Soit X l'endomorphisme associé à q. Déterminer les images possibles de $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$ par X. En déduire que P est globalement invariant par X. Montrer alors, que

$$\text{X}\left(\overrightarrow{k}\right) = \overrightarrow{k} \quad \text{ou} \quad \text{X}\left(\overrightarrow{k}\right) = -\overrightarrow{k}.$$

3. Déterminer les quatre endomorphismes qui peuvent être associés à q.

4. Déterminer analytiquement tous les éléments de Q.

Vérifier qu'il existe, dans Q, deux déplacements.

Déterminer leur nature et éventuellement leur forme réduite.