

## ∞ Baccalauréat C Antilles–Guyane juin 1984 ∞

### EXERCICE 1

4 POINTS

Soit  $P$  le plan affine euclidien orienté et  $R = (O; \vec{u}, \vec{v})$  un repère orthonormé direct de  $P$ .  
Soit  $f$  l'application de  $P$  dans  $P$ , qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z = x + iy$ , associe le point  $M'$  d'affixe :

$$z' = x' + iy' = (1+i)z - i.$$

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de  $f$ .
2. On note  $A$  le point de coordonnées  $(1; 0)$  et  $O'$  l'image de  $O$  par  $f$ . Soit  $D$  une droite passant par  $O$ ,  $D'$  l'image de  $D$  par  $f$ .
  - a. Donner une mesure de l'angle  $(D, D')$ .
  - b. On désigne par  $I$  le point d'intersection de  $D$  et  $D'$ . Montrer que  $(A, I, O, O')$  sont cocycliques.

### EXERCICE 2

4 POINTS

Soit la suite  $(u_n)$  à termes positifs définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :

$$\begin{cases} u_1 & = 1 \\ n^2 u_n^2 - (n-1)^2 u_{n-1}^2 & = n \quad \text{pour } n \geq 2. \end{cases}$$

1. On considère la suite  $(v_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $v_n = n^2 u_n^2$ .  
Déterminer  $v_n$  en fonction de  $n$ .
2. En déduire que  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

### PROBLÈME

12 POINTS

Soit :  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  
 $\varphi$  une application continue de  $I$  dans  $I$ , involutive, c'est-à-dire telle que :  
 $\varphi \circ \varphi = \text{Id}$  où  $\text{Id}$  est l'application identique de  $I$ .

On se propose de déterminer et d'étudier dans certains cas, des applications  $f$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant la relation :

$$(E) : f'(x) = f(x) + f(\varphi(x)) \text{ pour tout réel } x \text{ de } I.$$

#### Partie A

On considère les fonctions numériques  $\varphi_1, \varphi_2$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = a - x \quad (a \text{ nombre réel fixé}), \\ \varphi_2(x) = -\ln(x+1) \quad \text{si } x \geq 0 \\ \varphi_2(x) = e^{-x} - 1 \quad \text{si } x < 0 \end{cases}$$

où  $\ln x$  est le logarithme népérien de  $x$ .

1. Montrer que  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont involutives. Étudier leur continuité et leur dérivabilité.
2. Étudier les variations de  $\varphi_2$ . Tracer sa courbe représentative  $C$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

**Partie B**

On suppose qu'il existe une fonction  $f$  vérifiant (E).

1. Montrer que  $f'$  est continue sur I et que si  $\varphi$  est dérivable sur I, alors  $f'$  est dérivable sur I.
2. Établir la relation : pour tout  $x$  de I,  $f'(\varphi(x)) = f'(x)$ .  
En déduire que si  $\varphi$  est dérivable sur I, alors  $f$  vérifie la relation :

$$(F) : f''(x) - [1 + \varphi'(x)]f'(x) = 0 \quad \text{pour tout réel } x \text{ de I.}$$

3. On pose  $\varphi = \varphi_1$ .
  - a. Déterminer l'ensemble des fonctions  $f$  vérifiant (F).
  - b. Préciser, parmi celles-ci, celles qui vérifient aussi (E).

**Partie C**

On revient au cas général où  $\varphi$  est une fonction dérivable et involutive sur I. On suppose de plus qu'il existe un point  $x_0$  unique de I tel que  $\varphi(x_0) = x_0$ .

1. Montrer que la fonction  $f$  définie sur I par :

$$f(x) = A \int_{x_0}^x e^{t+\varphi(t)} dt + B \quad \text{où } A \text{ et } B \text{ sont des constantes réelles,}$$

vérifie la relation (F).

2. Montrer que les fonctions

$$x \longmapsto e^{x+\varphi(x)} \quad \text{et} \quad x \longmapsto \int_{x_0}^{\varphi(x)} e^{t+\varphi(t)} dt + \int_{x_0}^x e^{t+\varphi(t)} dt$$

sont des primitives sur I d'une même fonction. En déduire que :

$$\int_{x_0}^{\varphi(x)} e^{t+\varphi(t)} dt + \int_{x_0}^x e^{t+\varphi(t)} dt = e^{x+\varphi(x)} - e^{2x_0}.$$

3. En déduire la relation qui doit lier  $A$  et  $B$  pour que  $f$  vérifie la relation (E).

**Partie D**

On pose  $\varphi = \varphi_2$ .

1. Montrer que 0 est la seule valeur de  $x$  vérifiant  $\varphi_2(x) = x$ .
2. Déterminer, en appliquant les résultats du C, des fonctions vérifiant (E).
  - a. Montrer que :  $e^{-t} + t - 1 \geq 0$  pour tout  $t$  réel.  
En déduire que :  $\int_0^x e^{t+e^{-t}-1} dt \leq x$  pour tout  $x \leq 0$ . En déduire  $\lim_{-\infty} g$ .
  - b. Donner le tableau de variation de  $g$ .

3. Soit  $g$  la fonction définie par :

$$g(x) = 1 + 2 \int_0^x e^{t-\ln(1+t)} dt \quad \text{si } x \geq 0$$

$$g(x) = 1 + 2 \int_0^x e^{t+e^{-t}-1} dt \quad \text{si } x < 0.$$

a. Montrer que  $g$  vérifie E. Préciser  $g'(0)$ . Déterminer les variations de  $g$ .

b. Montrer que si  $t \geq 0$ ,  $e^{t-\ln(1+t)} \geq \frac{1}{1+t}$ . En déduire  $\lim_{+\infty} g$ .