Baccalauréat C Antilles–Guyane juin 1989

EXERCICE 1 **4 POINTS**

1. **a.** Étudier les variations de la fonction f, définie pour tout x réel de l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$, par :

$$f(x) = 2\ln(x+1)$$

et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ unité : 2 cm.

b. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation :

$$2\ln(x+1) = x.$$

On notera λ la solution non nulle de cette équation.
Déterminer graphiquement une valeur approchée de λ à 10^{-1} près.

2. On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 2\ln\left(u_n + 1\right).$$

. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite à l'aide de $\mathcal{C}$ et de la droite d'équation $y = x$.

3. **a.** Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[2\ ;\ +\infty[$, on a :

$$\left|f'(x)\right| \leqslant \frac{2}{3}.$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :

$$|u_{n+1} - \lambda| \leqslant \frac{2}{3}|u_n - \lambda| \quad \text{puis } |u_n - \lambda| \leqslant 3\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

et que la suite converge vers λ.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

1. **a.** Montrer que, pour tout réel x, on a :

$$\frac{1}{(\text{e}^x+1)^2} = 1 - \frac{\text{e}^x}{\text{e}^x+1} - \frac{\text{e}^x}{(\text{e}^x+1)^2}.$$

b. Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(\text{e}^x+1)^2}\,\text{d}x.$$

2. **a.** Déterminer une primitive de la fonction

$$x \longmapsto \frac{e^x}{(e^x+1)^3}.$$

b. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(e^x+1)^3}\,dx.$$

PROBLÈME **12 POINTS**

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. On prendra comme unité de longueur 5 cm.
Soit f l'application de P dans P qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{1}{2}\left(3z - z^3\right).$$

A. Étude de quelques propriétés de f

1. Déterminer l'ensemble des points invariants de P par f.
2. Déterminer l'ensemble des points M de P tels que O, M et M' sont alignés.
3. Soient M et N deux points de P d'images respectives M' et N' par f. Que peut-on dire de M' et N' lorsque :
   a. M et N sont symétriques par rapport à la droite $\left(O\,;\,\vec{\imath}\right)$?
   b. M et N sont symétriques par rapport à O ?

B. Image par f du cercle de centre O et de rayon 1

On désigne ce cercle par C et par C' son image par f. Soit C_1 la partie de C située dans le premier quadrant, c'est-à-dire l'ensemble des points de C ayant une abscisse et une ordonnée positives.

1. Soit C_1' l'image de C_1 par f. Comment peut-on obtenir C' à partir de C_1' ?
2. Soit M d'affixe $z = e^{i\alpha}$ un point de C_1 $\left(0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ et M' l'image de M par f.
   Déterminer l'affixe de l'image Ω_M du point M dans l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{3}{2}$.
   Montrer que M' est l'image de M dans la rotation de centre Ω_M et d'angle 2α.
   Faire la figure dans le cas où $\alpha = \frac{\pi}{3}$.
3. Soit Γ_M le cercle de centre Ω_M et de rayon $\frac{1}{2}$.
   Montrer que C et Γ_M sont tangents au point M et que M' appartient à Γ_M.

4. On suppose dans cette question que α est différent de 0 et $\dfrac{\pi}{2}$.

On note M'' le point diamétralement opposé à M sur Γ_M.

a. Montrer que M'' est différent de M'.

b. On appelle J le point d'intersection des droites $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\imath}\right)$ et $\left(M'M''\right)$. Montrer que le triangle OM''J est isocèle. En déduire que la droite (JM) est la tangente commune aux deux cercles.

c. Montrer que 2α est une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{M'M''}\right)$.

5. **a.** Montrer que les coordonnées x' et y' de M', image par f du point M de C_1 d'affixe $z = \text{e}^{\text{i}\alpha}$ sont données, en fonction de α, par :

$$\left\{\begin{array}{lllll} x' & = & u(\alpha) & = & \dfrac{1}{2}(3\cos\alpha - \cos 3\alpha) \\ y' & = & v(\alpha) & = & \dfrac{1}{2}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha) \end{array}\right. \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$$

b. On suppose α différent de 0. Soit T la tangente à C_1' au point M'. Montrer que T admet pour vecteur directeur le vecteur $\cos 2\alpha\,\overrightarrow{\imath} + \sin 2\alpha\,\overrightarrow{\jmath}$.

On rappelle que :

$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}.$$

c. En déduire que, pour α différent de 0 et $\dfrac{\pi}{2}$, T est la droite $\left(M'M''\right)$.

Que peut-on dire de la tangente à C_1' au point correspondant à $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$?

d. On admet que le résultat démontré au 5. b. est encore valable.

Que peut-on dire de la tangente à C_1' au point correspondant à $\alpha = 0$?

e. Déduire de ce qui précède une construction de M' et de T connaissant M.

Sur une nouvelle figure, construire les points M' correspondants aux valeurs suivantes de α : 0, $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{3}$ et tracer les tangentes à C_1' correspondantes.

6. Étudier les variations des fonctions u et v sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$, rassembler les résultats obtenus dans un même tableau et terminer la construction de C_1' puis celle de C'.