Baccalauréat C Antilles–Guyane juin 1990

EXERCICE 1 **4 points**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$, on considère l'application f qui associe, au point M d'affixe z, le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \text{i}\overline{z}.$$

1. Montrer que $f = R \circ S$ où S est la réflexion d'axe $\left(\text{O}~;~\vec{u}\right)$ et R est une rotation dont on précisera les éléments.
2. En utilisant une décomposition de R en composée de deux réflexions, montrer que f est une réflexion dont on précisera l'axe.
3. Soit g l'application du plan dans lui-même qui, au point M d'affixe z, associe le point M'' d'affixe z'' tel que :

$$z'' = \text{i}z + 1 + \text{i}.$$

   a. Caractériser l'application T telle que : $g = T \circ f$.
   b. En déduire une construction géométrique, pour tout point M du plan, du point M'', image de M par g.
   c. Montrer que, pour tout point M du plan, le milieu du segment $[MM'']$ appartient à une droite fixe.

EXERCICE 2 **4 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$. On note A le point d'affixe $4 + 2\text{i}$, B le point d'affixe $-2 - \text{i}$ et M le point d'affixe z.
Soit le nombre complexe

$$Z = \dfrac{z - 4 - 2\text{i}}{z + 2 + \text{i}}.$$

1. Donner une signification géométrique de $|Z|$ et de $\arg Z$.
2. Préciser la nature, puis construire :
   a. l'ensemble des points M d'affixe z, tels que $|Z| = 1$;
   b. l'ensemble des points M d'affixe z, tels que $|Z| = 2$;
   c. l'ensemble des points M d'affixe z, tels que Z est un réel positif;
   d. l'ensemble des points M d'affixe z, tels que Z est un imaginaire pur.

EXERCICE 2 **4 points**
Enseignement de spécialité

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on considère la courbe $\mathcal{C}$ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x &=& \cos^2 t + \cos t - 1\\ y &=& (1 + \cos t)\sin t.\end{array}\right.$$

1. Que peut-on dire des points M et M' de $\mathscr{C}$ de paramètres respectifs t et $-t$?
   En déduire qu'il suffit de construire la partie de $\mathscr{C}$ correspondant aux valeurs de t de l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ pour pouvoir obtenir $\mathscr{C}$.
2. Étudier les variations de x et y lorsque t appartient à l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.
3. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ en précisant les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points de paramètres $0, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}$.
   On admettra qu'au point de paramètre π la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à l'axe des abscisses.

N. B. : On prendra 6 cm comme unité de longueur.

PROBLÈME **12 points**

Partie I Soit f la fonction définie, pour tout nombre réel x, par :

$$f(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)$$

On note $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer les limites de f lorsque x tend vers $-\infty$ et $+\infty$.
   Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.
2. Montrer que $\mathscr{C}$ admet une asymptote D d'équation :

$$y = -x$$

   et préciser la position de D par rapport à $\mathscr{C}$.
3. Tracer D et $\mathscr{C}$ (unité graphique : 4 cm). On construira, en particulier, la tangente à $\mathscr{C}$ au point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 0.
4. Soit x_0 un nombre réel non nul.
   On note M et N les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives x_0 et $-x_0$.
   a. Vérifier que : $f(x_0) - f(-x_0) = -x_0$.
   En déduire que la droite (MN) garde une direction fixe que l'on précisera.
   b. Montrer que l'on a :

$$f'(x_0) + f'(-x_0) = -1.$$

   En déduire que les tangentes à $\mathscr{C}$ en M et N se coupent sur l'axe des ordonnées.
   c. Illustrer sur la courbe $\mathscr{C}$ les résultats précédents en prenant $x_0 = 1$.

Partie II On se propose dans cette partie d'étudier la suite (u_n) de nombres réels u_n, définie par :
$u_1 = 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et, pour tout entier naturel non nul n, par :

$$u_{n+1} = u_n\left(1 + \frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}}\right).$$

1. Montrer que, pour tout nombre réel t strictement positif, on a :

$$t-\frac{t^2}{2}<\ln(1+t)<t.$$

On pourra étudier brièvement les fonctions u et v définies pour tout réel t positif par :

$$u(t)=\ln(1+t)-t \quad \text{et} \quad v(t)=\ln(1+t)-t+\frac{t^2}{2}.$$

2. En déduire que, pour tout nombre réel x, on a :

$$\mathrm{e}^{-x}-\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2}-<f(x)<\mathrm{e}^{-x}. \quad (1)$$

3. **a.** Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

b. Montrer que, pour tout entier strictement positif, on a :

$$\ln u_n = f(1)+f(2)+\cdots+f(n). \quad (2)$$

c. On pose :

$$S_1=\frac{1}{\mathrm{e}}+\frac{1}{\mathrm{e}^2}+\cdots+\frac{1}{\mathrm{e}^n} \quad \text{et} \quad S_2=\frac{1}{\mathrm{e}^2}+\frac{1}{\mathrm{e}^4}+\cdots+\frac{1}{\mathrm{e}^{2n}}$$

À l'aide des relations (1) et (2), montrer que :

$$S_1-\frac{1}{2}S_2<\ln u_n<S_1$$

4. **a.** Si a est un nombre réel strictement supérieur à 1, calculer la somme $\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\cdots+\frac{1}{a^n}$ et montrer qu'elle admet une limite quand n tend vers $+\infty$ que l'on déterminera.

b. Montrer que la suite (u_n) est majorée et convergente. Soit ℓ sa limite.

c. Montrer que :

$$\frac{2\mathrm{e}+1}{2\left(\mathrm{e}^2-1\right)}\leqslant \ln\ell \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}-1}.$$

En déduire une valeur approchée de ℓ à $0,1$ près.