Durée : 4 heures

Baccalauréat C Antilles-Guyane juin 1991

EXERCICE 1 **4 points**

Soit D une droite du plan et F un point dont la distance à D est égale à 3, l'unité étant le centimètre.
Soit Δ la droite passant par F et orthogonale à D.
On considère θ un réel tel que $0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

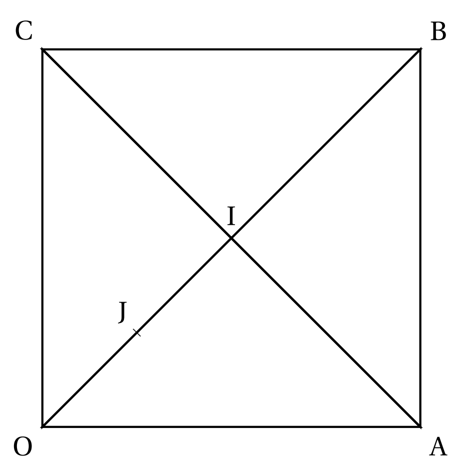
1. Soit Γ_θ l'ensemble des points M du plan tels que $\dfrac{\text{MF}}{\text{MH}} = \cos\theta$, H désignant le projeté orthogonal de M sur la droite D.
   Donner, suivant les, valeurs de θ, la nature de Γ_θ.
2. Tracer Γ_0, cas où $\theta = 0$.
3. **a.** Soit $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.
   Déterminer les sommets A et A$'$ de $\Gamma_{\frac{\pi}{3}}$ situés sur Δ, le centre O et le deuxième foyer F$'$ de $\Gamma_{\frac{\pi}{3}}$.
   Tracer $\Gamma_{\frac{\pi}{3}}$.
   b. Déterminer l'équation cartésienne de $\Gamma_{\frac{\pi}{3}}$ dans le repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$ où O est le centre de $\Gamma_{\frac{\pi}{3}}$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire de la droite Δ.

EXERCICE 2 **4 points**

Soit d un réel strictement positif.
Dans le plan orienté, on considère le carré OABC de centre I tel que :

$$\left\{\begin{array}{l c l}\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OC}}\right) & = & +\dfrac{\pi}{2}\\ \text{OA} & = & d.\end{array}\right.$$

Soit J le milieu de [OI].



1. Soit f la similitude plane directe telle que : $\begin{cases} f(\text{O}) &= I \\ f(\text{A}) &= J. \end{cases}$

   a. Déterminer l'angle et le rapport de f.

   b. Construire $\text{C}' = f(\text{C})$.

   Déterminer $f(\text{B})$.

   c. Soit Ω le centre de la similitude f.

   Montrer que les points (Ω, O, I, C) d'une part et (Ω, O, A, J) d'autre part sont cocycliques.

   En déduire une construction de Ω.

   d. Montrer que les droites (OΩ) et (ΩC) sont orthogonales.

2. Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$ direct tel que A ait pour affixe d.

   Déterminer la forme complexe de f.

PROBLÈME **12 points**

K désignant un nombre réel, l'objet de ce problème est l'étude de certaines fonctions f_K définies sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f_K(x) = \frac{\ln x}{x} + K \ln x.$$

A

Dans cette partie, nous supposerons que $K = 0$.
Soit f la fonction numérique définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

1. Étudier les variations de f.

   On appelle $(\mathscr{C}_0)$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$, (unité graphique : 1 cm).

   Tracer $(\mathscr{C}_0)$.

2. Calculer l'aire, en cm^2, de la portion du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $(\mathscr{C}_0)$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \text{e}$.

B

Études des dérivées successives de la fonction f définie dans la partie A

1. Calculer $f''(x)$, x appartenant à $]0~;~+\infty[$.

2. Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on peut définir deux suites réelles $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$f^{(n)}(x) = \frac{U_n + V_n \ln x}{x^{n+1}}$$

avec

$$\begin{array}{lll} U_1 = 1\,; & & \\ V_1 = -1\,; & & \\ U_{n+1} = V_n - (n+1)U_n & \text{pour} & n \geqslant 1\,; \\ V_{n+1} = -(n+1)V_n & \text{pour} & n \geqslant 1. \end{array}$$

où $f^{(n)}$ désigne, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, la dérivée n-ième de f.

3. **a.** Exprimer V_n en fonction de n.

   b. Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$U_n = (-1)^{n+1} n! \left[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right].$$

C

Étude de certaines fonctions f_K, où K est un réel strictement positif

On rappelle que f_K est définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f_K(x) = \frac{\ln x}{x} + K \ln x$$

On donne $K_1 = \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$ et $K_2 = \dfrac{1}{2\mathrm{e}^2}$.

1. Déterminer les limites de f_K aux bornes de l'ensemble de définition.
2. Calculer $f'_K(x)$ pour tout x strictement positif.
3. On appelle t_K la fonction numérique définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$t_K(x) = 1 - \ln x + Kx.$$

   a. Étudier les variations de t_K.

   b. Montrer que, pour tout x de $]0~;~+\infty[$, $t_{K_1}(x) \geqslant 0$.

   c. En déduire le tableau de variations de f_{K_1} sur $]0~;~+\infty[$.

   d. Montrer que l'équation $t_{K_2}(x) = 0$ admet deux solutions α et β dans l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

   e. En déduire le sens de variation de f_{K_2} sur $]0~;~+\infty[$.