Durée : 4 heures

Baccalauréat C Antilles–Guyane septembre 1990

EXERCICE 1 **4 points**

1. **a.** Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n+2^{-n})}{2n} = 0.$$

b. En déduire que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(1+n2^{n})}{2n} = \frac{\ln 2}{2}.$$

2. Pour tout entier naturel n, on pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{2^n x}{1+n2^n x}\,\mathrm{d}x.$$

a. Calculer u_0.

b. Calculer u_n pour tout entier n supérieur à 1.

c. En utilisant les questions précédentes, déterminer

$$\lim_{n \to +\infty} u_n.$$

EXERCICE 2 **4 points**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$, on considère l'application f, qui associe, au point M d'affixe z, le point M$'$ d'affixe z' tel que

$$z' = \text{i}\overline{z}.$$

1. Montrer que $f = R \circ S$ où S est la réflexion d'axe $\left(\text{O},~\overrightarrow{u}\right)$ et R une rotation dont on précisera les éléments.
2. En utilisant une décomposition de R en composée de deux réflexions, montrer que f est une réflexion dont on précisera l'axe.
3. Soit g l'application du plan dans lui-même qui, au point M d'affixe z, associe le point M$''$ d'affixe z'' tel que

$$z'' = \text{i}\overline{z} + 1 + \text{i}.$$

a. Caractériser l'application T telle que $g = T \circ f$.

b. En déduire une construction géométrique, pour tout point M du plan, du point M$''$, image de M par g.

c. Montrer que, pour tout point M du plan, le milieu du segment [MM$''$] appartient à une droite fixe.

Problème **12 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ unité : 4 cm. On note A le point de coordonnées (1 ; 0) et A$'$ le point de coordonnées (−1 ; 0).
Soit F l'application qui, à tout point M du plan privé de la droite $\left(\text{O},\,\vec{\imath}\right)$ fait correspondre le point M$'$ orthocentre du triangle OAM.
I.

1. Déterminer l'image par F :

a. de la droite $\left(\text{O},\,\vec{\jmath}\right)$ privée de O ;

b. de la parallèle D à la droite $\left(\text{O},\,\vec{\jmath}\right)$ passant par A privée de A ;

c. du cercle de diamètre [OA] privé des points O et A.

2. Montrer que, dans le plan privé des droites $\left(\text{O},\,\vec{\imath}\right)$ et $\left(\text{O},\,\vec{\jmath}\right)$, l'application $F \circ F$ est l'application identique.

II. Dans cette partie, on se propose d'étudier l'image par F, notée S*, du cercle de centre O passant par A privé des points A et A$'$, noté C^*.

1. *Représentation paramétrique de* S^*
Soit M un point de $\mathbb{C}^*$, on note t la mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{OA}},\,\overrightarrow{\text{OM}}\right)$.

a. Montrer que l'angle $\left(\overrightarrow{\text{OA}},\,\overrightarrow{\text{OM}'}\right)$ a pour mesure $\dfrac{t}{2}$ modulo π.

b. Soit S la courbe dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & f(t) & = & \cos t \\ y & = & g(t) & = & \cos t \cdot \tan \dfrac{t}{2}. \end{array}\right. \qquad t \in]-\pi\,;\,\pi[$$

Montrer que S^* est la courbe S privée de A.

2. Construction de S

a. Montrer que l'on peut réduire l'étude des fonctions f et g à l'intervalle $[0\,;\,\pi[$.

b. Calculer $g'(t)$ et donner son expression en fonction de $u = \tan\dfrac{t}{2}$.
On rappelle que : $\cos t = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ et $\sin t = \dfrac{2u}{1+u^2}$.
Étudier le signe de $g'(t)$ sur l'intervalle $[0\,;\,\pi[$. (On pourra poser $X = u^2$.)
Donner les valeurs exactes de $f(\alpha)$ et $g(\alpha)$ où α est le réel de $[0\,;\,\pi[$ tel que

$$g'(\alpha) = 0.$$

c. Dresser le tableau des variations simultanées de f et g sur l'intervalle $[0\,;\,\pi[$.
Déterminer le point de S de paramètre $\dfrac{\pi}{2}$ et la tangente en ce point à la courbe S.
Déterminer les points d'intersection de S^* et C^*.

d. Tracer la courbe S.