

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C septembre 1984 Antilles ∞

EXERCICE 1

Soit la suite (u_n) à termes positifs définie sur \mathbb{N}^* par $u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 2$ par

$$n^2 u_n^2 - (n-1)^2 u_{n-1}^2 = n.$$

1. On considère la suite (v_n) définie sur \mathbb{N}^* par $v_n = n^2 u_n^2$. Déterminer v_n en fonction de n .
2. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 2

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A, B, C de coordonnées : A(3; 2; 3), B(9; 2; 11), C(6; -3; 7).

1. Montrer que les vecteurs \vec{AC} et \vec{BC} sont orthogonaux.
2. Donner une équation du plan P passant par les points A, B et C.
3. Donner une équation de la sphère S de diamètre [AB] et préciser les coordonnées de son centre et son rayon.

PROBLÈME

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , φ une application continue de I dans I, involutive, c'est-à-dire telle que $\varphi \circ \varphi = \text{Id}$ où Id est l'application identique de I.

On se propose de déterminer et d'étudier dans certains cas, des applications f de I dans \mathbb{R} vérifiant la (E) relation :

$$f'(x) = f(x) + f[\varphi(x)] \quad \text{pour tout réel } x \text{ de I}$$

A On considère les fonctions numériques φ_1, φ_2 définies sur \mathbb{R} par :

- $\varphi_1(x) = a - x$ (a nombre réel fixé)
- $\begin{cases} \varphi_2(x) = -\ln(x+1) & \text{si } x \geq 0 \\ \varphi_2(x) = e^{-x} - 1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

1. Montrer que φ_1 et φ_2 sont involutives.
Étudier leur continuité et leur dérivabilité.
2. Étudier les variations de φ_2 . Tracer sa courbe représentative C dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

B On suppose qu'il existe une fonction f vérifiant (E).

1. Montrer que f' est continue sur I et que si φ est dérivable sur I, alors f' est dérivable sur I.

2. Établir la relation : pour tout réel x de I ,

$$f'[\varphi(x)] = f'(x).$$

En déduire que si φ est dérivable sur I , alors f vérifie la relation :

$$f''(x) - [1 + \varphi'(x)] f'(x) = 0 \quad (F)$$

pour tout réel x de I .

3. On pose $\varphi = \varphi_1$.

- Déterminer l'ensemble des fonctions f vérifiant (F).
- Préciser, parmi celles-ci, celles qui vérifient aussi (E).

C On revient au cas général où φ est une fonction dérivable et involutive sur I . On suppose de plus qu'il existe un point unique x_0 de I tel que $\varphi(x_0) = x_0$.

1. Montrer que la fonction f définie sur I par :

$$f(x) = A \int_{x_0}^x e^{t+\varphi(t)} dt + B$$

où A et B sont des constantes réelles, vérifie la relation (F).

2. Montrer que les fonctions $x \mapsto e^{x+\varphi(x)}$ et $x \mapsto \int_{x_0}^{\varphi(x)} e^{t+\varphi(t)} dt + \int_{x_0}^x e^{t+\varphi(t)} dt$ sont des primitives sur I d'une même fonction. En déduire que

$$\int_{x_0}^{\varphi(x)} e^{t+\varphi(t)} dt + \int_{x_0}^x e^{t+\varphi(t)} dt = e^{x+\varphi(x)} - e^{2x_0}.$$

3. En déduire la relation qui doit lier A et B pour que f vérifie la relation (E).

D On pose $\varphi = \varphi_2$.

- Montrer que 0 est la seule valeur de x vérifiant $\varphi_2(x) = x$.
- Déterminer en appliquant les résultats du C, des fonctions f vérifiant (E).
- Soit g la fonction définie par :

$$\begin{cases} g(x) = 1 + 2 \int_0^x e^{t-\ln(1+t)} dt & \text{si } x \geq 0 \\ g(x) = 1 + 2 \int_0^x e^{t+e^{-t}-1} dt & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

- Montrer que g vérifie (E). Préciser $g'(0)$.
- Montrer que si $t \geq 0$, $e^{t-\ln(1+t)} \geq \frac{1}{1+t}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- Montrer que $e^{-t} + t - 1 \geq 0$ pour tout t réel.
En déduire que $\int_0^x e^{t+e^{-t}-1} dt$ pour tout $x \leq 0$.
En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
- Donner le tableau de variation de g .