

♣ Baccalauréat C Antilles-Guyane juin 1981 ♣

EXERCICE 1

4 POINTS

Soit f la fonction numérique de la variable x définie par

$$f(x) = \log(e^{2x} - 3e^x + 2).$$

1. Étudier la fonction f et construire sa courbe représentative \mathcal{C} dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé.
On montrera notamment que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe \mathcal{C} .
2. Soit g la restriction de f à l'intervalle $] \log 2; +\infty[$. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} . Calculer $g^{-1}(x)$.

EXERCICE 2

3 POINTS

n étant un entier relatif quelconque, on considère les entiers relatifs a et b définis par

$$a = n^3 - 2n + 5 \quad ; \quad b = n + 1.$$

1. Montrer que P.G.C.D. $(a, b) = \text{P.G.C.D.}(b, 6)$.
2. Pour quelles valeurs de n , a-t-on, P.G.C.D. $(a, b) = 3$?
3. Déterminer n pour que le nombre $\frac{a}{b}$ soit un entier relatif.

PROBLÈME

3 POINTS

On appelle F l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} deux fois dérivables sur \mathbb{R} . On sait que F , muni de l'addition des applications et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

Si f est un élément de F , on note f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée seconde de f .

Partie A

ω étant un réel non nul, on considère le sous-ensemble E_ω de F des applications f qui vérifient

$$f'' = -\omega^2 f.$$

1. Démontrer que E_ω est un sous-espace vectoriel de F .
2. On considère les fonctions numériques ϵ_1 et ϵ_2 définies pour tout x réel par

$$\epsilon_1(x) = \cos \omega x \quad \text{et} \quad \epsilon_2(x) = \sin \omega x.$$

Montrer que $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ est une partie libre de E_ω .

3. Montrer que, quel que soit l'élément f de F , il existe deux fonctions numériques u et v de la variable x , dérivables sur \mathbb{R} telles que pour tout x réel :

$$\begin{cases} f(x) &= u(x)e_1 + v(x)e_2(x) \\ f'(x) &= u(x)e_1' + v(x)e_2'(x). \end{cases}$$

4. Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que f soit élément de E_ω est que pour tout x réel

$$u'(x) = v'(x) = 0.$$

En déduire que (e_1, e_2) est une base de E_ω .

5. Résoudre dans F l'équation $f + 9f'' = 0$. Montrer qu'il existe une solution unique telle que

$$f(0) = 3 \quad \text{et} \quad f'(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

6. Montrer que, quel que soit l'entier naturel n non nul, tout élément f de E_ω est n fois dérivable sur \mathbb{R} .

Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout x réel

$$f^{(n)}(x) = \omega^n f\left(x + \frac{n\pi}{2\omega}\right).$$

où $f^{(0)} = f$ et pour tout entier naturel n non nul $f^{(n)}$ est la fonction dérivée d'ordre n de f .

Partie B

Dans la suite du problème on donne à ω la valeur 1.

On appelle e_1, e_2, u_k les fonctions numériques de la variable réelle x définies par

$$e_1(x) = \cos x, \quad e_2(x) = \sin x, \quad u_k(x) = k,$$

où k est un réel strictement positif.

On considère l'espace vectoriel H engendré par e_1, e_2, u_k .

1. Montrer que $B_k = (e_1, e_2, u_k)$ est une base de H et que E_1 est un sous-espace vectoriel de H dont on donnera une équation dans la base B_k .

En déduire que tout élément g de H s'écrit de façon unique, $g = f + a$ où f est un élément de E_1 et a une fonction constante.

2. Montrer que l'on peut définir une application Φ de $H \times H$ dans \mathbb{R} , qui à tout élément (g_1, g_2) de $H \times H$ associe

$$\Phi(g_1, g_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_1(t) \cdot g_2(t) dt.$$

Exprimer $\Phi(g_1, g_2)$ en fonction des coordonnées $(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)$ et $(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2)$ de g_1 et g_2 dans la base B_k .

3. Montrer que Φ est un produit scalaire.

Déterminer k pour que la base B_k soit orthonormée pour ce produit scalaire.

Partie C

On munit H de la multiplication scalaire ψ et on rapporte H à la base orthonormée $B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

1. Soit Ψ l'application qui à tout élément g de H associe $\Psi(g) = g''$.

Montrer que Ψ est un endomorphisme de H

On note I l'application identique dans H .

Montrer que Ψ est la composée de l'application $(-I)$ et d'une application que l'on caractérisera.

2. Pour tout entier naturel n , on considère l'application φ_n de H vers \mathbb{F} , qui à tout élément g de H tel que $g = f + a$ associe la fonction

$$\varphi_n(g) = (-1)^{n+1} [f^{(n)} + a].$$

a. Montrer que φ_n est un endomorphisme de H et que

$$\varphi_{n+4} = \varphi_n.$$

b. En déduire, suivant l'entier n , l'expression analytique de φ_n dans la base $B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

c. Déterminer suivant les valeurs de n , la nature de φ_n et préciser, dans chacun des cas, ses éléments remarquables.

d. Soit Θ_n la restriction de φ_n au plan vectoriel E_1 . Montrer que l'ensemble $\{\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3\}$ muni de la loi \circ de composition des applications est un groupe commutatif.