

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1985 Antilles ∞

EXERCICE 1

4 points

Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (\ln x)^2.$$

1. Étudier la fonction f ; tracer la courbe représentative (Γ) de la fonction f dans le plan rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé.
2. a. À l'aide d'une double intégration par parties, calculer :

$$\int_1^\lambda f(x) dx \quad \text{où } \lambda \text{ est un réel supérieur à } 1.$$

- b. Déterminer l'aire de la portion du plan, ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ tels que :

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq e \\ 0 \leq y \leq f(x). \end{cases}$$

EXERCICE 2

4 points

Dans un plan \mathcal{P} , on considère une droite \mathcal{D} et un point S non situé sur \mathcal{D} . Sur la droite Δ perpendiculaire en S au plan \mathcal{P} , on considère un point A fixe distinct de S . B et C sont deux points variables de \mathcal{D} tels que les droites (SB) et (SC) soient perpendiculaires.

1. Démontrer que la somme $AB^2 + AC^2 - BC^2$ est constante.
2. Soit H la projection orthogonale de S sur le plan (ABC) . Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC .
3. Dans le triangle ABC , les hauteurs issues de A , B et C coupent les côtés opposés respectivement en A_1 , B_1 et C_1 .

Montrer que A_1 est un point fixe.

Montrer que, dans le plan (ABC) , B_1 et C_1 appartiennent au cercle Γ de diamètre $[AH]$, privé des points A et H .

Réciproquement, montrer que, quel que soit le point B_0 de Γ , on peut définir des points B et C sur \mathcal{D} tels que (BB_0) soit la hauteur issue de B , et que les droites (SB) et (SC) soient perpendiculaires.

EXERCICE 2

4 points

On se propose dans ce problème d'étudier l'ensemble, noté Σ , des points de l'espace équidistants de deux droites D et D' non coplanaires et orthogonales.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $R = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

La droite D passe par le point A de coordonnées $(0; 0; 1)$ et admet comme vecteur directeur \vec{u} tel que $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$.

La droite D' passe par le point B de coordonnées $(0; 0; -1)$ et admet comme vecteur directeur \vec{v} tel que $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$.

1. Vérifier que D et D' sont orthogonales et non coplanaires. Montrer que le point O appartient à Σ .
2. Montrer qu'une représentation paramétrique de D est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Soit M un point de coordonnées $(x; y; z)$. Calculer la distance de M à la droite D .

3. Calculer de même la distance de M à la droite D' .
4. En déduire que M appartient à Σ si et seulement si on a :

$$xy + 2z = 0.$$

5. Déduire de cette relation :
 - a. Que les intersections de Σ avec des plans orthogonaux à la droite (AB) sont en général des hyperboles. Préciser le cas d'exception.
 - b. La nature des intersections de Σ avec des plans orthogonaux à l'axe $(O; \vec{i})$ ou à l'axe $(O; \vec{j})$.