

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C septembre 1981 Antilles–Guyane ∞

EXERCICE 1

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \frac{2x}{1+x} - \text{Log}(1+x).$$

1. Étudier f et la représenter graphiquement dans un plan rapporté à un repère orthonormé.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dont l'une est un réel strictement positif dont on déterminera la partie entière.
3. Calculer $\Phi(\lambda) = \int_0^\lambda f(x) dx$ où λ est un réel strictement supérieur à -1 (on pourra utiliser une intégration par parties).

EXERCICE 2

Dans l'anneau $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, on considère le système de deux équations à deux inconnues x et y

$$\begin{cases} x + \bar{3}y = \bar{1} \\ \bar{3}x - y = m \end{cases}$$

où m est un élément de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

1. Résoudre le système dans le cas où $m = \bar{1}$.
2. Discuter suivant les valeurs de m le nombre des solutions du système.

PROBLÈME

Soit P un plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct $R = (\mathbf{O}; \vec{i}, \vec{j})$.
Soit \mathcal{P} le plan vectoriel euclidien associé.

Partie A

À tout point M de P de coordonnées $(x; y)$ dans R , on associe son affixe z où $z = x + iy$.

1. Soient g et h les applications de P dans P qui, à tout point M d'affixe z , associent respectivement les points M' d'affixe z' et M'' d'affixe z'' définies par

$$z' = 3iz + 1, \quad \text{et} \quad z'' = (i-3)\bar{z} - i.$$

Donner la nature et les éléments géométriques des applications g et h .

2. Soit f l'application de \mathbb{P} dans \mathbb{P} qui, à tout point M d'affixe z associe le point N d'affixe $Z = X + iY$ définie par : $Z = z' + z''$.
Calculer X et Y en fonction de x et y .
Montrer que f est une symétrie dont on précisera les éléments géométriques.
3. Soit H l'ensemble des points du plan \mathbb{P} dont les deux coordonnées vérifient l'équation : $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$.
Préciser la nature et les éléments remarquables de H .
Déterminer une équation de l'ensemble H' , image de H par f . Construire H et H' .

Partie B

On note Φ l'endomorphisme associé à f , $\mathcal{L}(\vec{\mathbb{P}})$ l'ensemble des endomorphismes de $\vec{\mathbb{P}}$ et I l'application identique de \mathbb{P} .

1. Soit p l'élément de $\mathcal{L}(\vec{\mathbb{P}})$ défini par : $p = \frac{1}{2}(I - \Phi)$.
Montrer que p est une projection vectorielle dont on précisera les éléments caractéristiques.
2. À tout réel non nul t , on associe l'élément Φ_t , de $\mathcal{L}(\vec{\mathbb{P}})$ défini par $\Phi_t = I + t.p$.
Pour quelle valeur t_0 de t l'endomorphisme Φ_t est-il involutif? Comparer Φ et Φ_{t_0} .
Pour quelles valeurs de t l'endomorphisme Φ_t est-il bijectif?
Calculer alors la matrice inverse de la matrice de Φ_t .

Partie C

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} , $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et I l'application identique de E . Soit p une projection de E différente de l'application nulle, et Φ_t l'élément de $\mathcal{L}(E)$ défini pour tout réel t par : $\Phi_t = I + t.p$.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs de t pour que Φ_t soit involutif.
2. Montrer que Φ^{-1} n'est pas une bijection.
3. Soit T l'ensemble des endomorphismes Φ_t lorsque t est un réel différent de -1 .
Montrer que T est un groupe commutatif pour la loi \circ de composition des applications.

La partie C du problème peut être traitée indépendamment des parties A et D.