

## ♣ Baccalauréat S Antilles-Guyane 19 juin 2012 ♣

### EXERCICE 1

6 points

Commun à tous les candidats

Les parties B et C sont indépendantes.

On note  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = xe^{x-1} + 1.$$

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

#### Partie A : étude de la fonction

1. Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .  
Que peut-on en déduire pour la courbe  $\mathcal{C}$  ?
2. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
3. On admet que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et on note  $f'$  sa fonction dérivée.  
Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = (x+1)e^{x-1}$ .
4. Étudier les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et dresser son tableau de variation sur  $\mathbb{R}$ .

#### Partie B : recherche d'une tangente particulière

Soit  $a$  un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $a$ , qui passe par l'origine du repère.

1. On appelle  $T_a$  la tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $a$ . Donner une équation de  $T_a$ .
2. Démontrer qu'une tangente à  $\mathcal{C}$  en un point d'abscisse  $a$  strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si  $a$  vérifie l'égalité

$$1 - a^2 e^{a-1} = 0.$$

3. Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.

Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  de l'équation

$$1 - x^2 e^{x-1} = 0.$$

4. Donner alors une équation de la tangente recherchée.

#### Partie C : calcul d'aire

Le graphique donné en **Annexe 1** représente la courbe  $\mathcal{C}$  de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Construire sur ce graphique la droite  $\Delta$  d'équation  $y = 2x$ . On admet que la courbe  $\mathcal{C}$  est au-dessus de la droite  $\Delta$ . Hachurer le domaine  $\mathcal{D}$  limité par la courbe  $\mathcal{C}$  la droite  $\Delta$ , la droite d'équation  $(x = 1)$  et l'axe des ordonnées.
2. On pose  $I = \int_0^1 x e^{x-1} dx$ . Montrer à l'aide d'une intégration par parties que  $I = \frac{1}{e}$ .
3. En déduire la valeur exacte (en unités d'aire) de l'aire du domaine  $\mathcal{D}$ .

**EXERCICE 2****4 points****Commun à tous les candidats**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On réalisera sur une feuille de papier millimétré une figure en prenant pour unité 2 cm. On complètera cette figure au fur et à mesure des questions.

On considère les points A, B et C du plan complexe d'affixes respectives

$$a = -1 + 2i \quad ; \quad b = -2 - i \quad ; \quad c = -3 + i.$$

1. Placer les points A, B et C sur le graphique.
2. Calculer  $\frac{b}{a}$ , en déduire la nature du triangle OAB.
3. On considère l'application  $f$  qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  avec  $z \neq b$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  définie par

$$z' = \frac{z + 1 - 2i}{z + 2 + i}$$

- a. Calculer l'affixe  $c'$  du point  $C'$ , image de C par  $f$  et placer le point  $C'$  sur la figure.
  - b. Déterminer l'ensemble  $\mathcal{E}$  des points  $M$  d'affixe  $z$  avec  $z \neq b$ , tels que  $|z'| = 1$ .
  - c. Justifier que  $\mathcal{E}$  contient les points O et C. Tracer  $\mathcal{E}$ .
4. Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.

On appelle J l'image du point A par la rotation  $r$  de centre O et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .

On appelle K l'image du point C par la rotation  $r'$  de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

On note L le milieu de [JK].

Démontrer que la médiane issue de O du triangle OJK est la hauteur issue de O du triangle OAC.

**EXERCICE 3****5 points****Commun à tous les candidats**

Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  non nul par

$$\begin{cases} u_1 &= \frac{1}{2} \\ u_{n+1} &= \frac{n+1}{2n} u_n \end{cases}$$

1. Calculer  $u_2, u_3$  et  $u_4$ .
2. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_n$  est strictement positif.  
**b.** Démontrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.  
**c.** Que peut-on en déduire pour la suite  $(u_n)$ ?
3. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose

$$v_n = \frac{u_n}{n}.$$

- a.** Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme  $v_1$ .
- b.** En déduire que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$u_n = \frac{n}{2^n}.$$

4. Soit la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[1 ; +\infty[$  par

$$f(x) = \ln x - x \ln 2.$$

- a.** Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- b.** En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

**EXERCICE 4****5 points****Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité***Les cinq questions sont indépendantes.*

1. Dans un lycée donné, on sait que 55 % des élèves sont des filles. On sait également que 35 % des filles et 30 % des garçons déjeunent à la cantine.  
On choisit, au hasard, un élève du lycée.  
Quelle est la probabilité que cet élève ne déjeune pas à la cantine?
2. Une urne contient 10 jetons numérotés de 1 à 10, indiscernables au toucher. On tire 3 jetons simultanément.  
Combien de tirages différents peut-on faire contenant au moins un jeton à numéro pair?
3. Une variable aléatoire  $Y$  suit une loi binomiale de paramètres 20 et  $\frac{1}{5}$ .  
Calculer la probabilité que  $Y$  soit supérieure ou égale à 2. Donner une valeur approchée du résultat à  $10^{-3}$ .
4. Un appareil ménager peut présenter après sa fabrication deux défauts.  
On appelle  $A$  l'évènement « l'appareil présente un défaut d'apparence » et  $F$  l'évènement « l'appareil présente un défaut de fonctionnement ».  
On suppose que les évènements  $A$  et  $F$  sont indépendants.  
On sait que la probabilité que l'appareil présente un défaut d'apparence est égale à 0,02 et que la probabilité que l'appareil présente au moins l'un des deux défauts est égale à 0,069.  
On choisit au hasard un des appareils. Quelle est la probabilité que l'appareil présente le défaut  $F$ ?

5. On considère l'algorithme :

```

A et C sont des entiers naturels,
C prend la valeur 0.
Répéter 9 fois
    A prend une valeur aléatoire entière entre 1 et 7.
    Si A > 5 alors C prend la valeur de C + 1
    Fin Si
Fin répéter
Afficher C.

```

Dans l'expérience aléatoire simulée par l'algorithme précédent, on appelle  $X$  la variable aléatoire prenant la valeur  $C$  affichée.

Quelle loi suit la variable  $X$ ? Préciser ses paramètres.

#### EXERCICE 4

5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les quatre questions sont indépendantes.

1. a. Vérifier que le couple (4; 6) est une solution de l'équation

$$(E) \quad 11x - 5y = 14.$$

b. Déterminer tous les couples d'entiers relatifs  $(x; y)$  vérifiant l'équation (E).

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$2^{3n} \equiv 1 \pmod{7}.$$

b. Déterminer le reste de la division euclidienne de  $2011^{2012}$  par 7.

3. On se place dans le plan complexe. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation  $f$  qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que :

$$z' = \frac{3}{2}(1 - i)z + 4 - 2i.$$

4. On considère l'algorithme suivant où  $\text{Ent}\left(\frac{A}{N}\right)$  désigne la partie entière de  $\frac{A}{N}$ .

```

A et N sont des entiers naturels
Saisir A
N prend la valeur 1
Tant que  $N \leq \sqrt{A}$ 
    Si  $\frac{A}{N} - \text{Ent}\left(\frac{A}{N}\right) = 0$  alors Afficher N et  $\frac{A}{N}$ 
    Fin si
N prend la valeur N + 1
Fin Tant que.

```

---

Quels résultats affiche cet algorithme pour  $A = 12$  ?  
Que donne cet algorithme dans le cas général ?

ANNEXE 1  
Exercice 1  
À rendre avec la copie

Courbe  $\mathcal{C}$  représentative de  $f$

