

∞ Baccalauréat S Antilles-Guyane ∞
septembre 2011

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln x - 1.$$

Partie A : Étude d'une fonction

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
- b.** Déterminer la limite de la fonction f en 0 .
2. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0; +\infty[$.
En déduire le tableau de variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0; +\infty[$. On note α cette solution. Déterminer un encadrement de α à la précision 10^{-2} .
4. Déterminer le signe de $f(x)$ lorsque x appartient à $]0; +\infty[$.
5. Montrer que $\ln \alpha = \frac{1}{\alpha}$.

Partie B : Calcul d'une intégrale

On donne en annexe la courbe \mathcal{C} , représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé. On considère l'intégrale suivante :

$$I = \int_{\alpha}^4 f(x) dx.$$

1. Justifier que l'intégrale I est l'aire d'une partie du plan que l'on hachurera sur le graphique donné en annexe (à rendre avec la copie).
2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale

$$J = \int_{\alpha}^4 x \ln x dx.$$

3. Montrer l'égalité : $I = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha}{2} + 16 \ln 2 - 8$.

En déduire une valeur approchée de I à 10^{-1} près.

EXERCICE 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les trois points A, B et C de coordonnées respectives :

A(-1 ; 2 ; 1), B(1 ; -6 ; -1) et C(2 ; 2 ; 2).

1. a. Vérifier que les points A, B et C définissent bien un plan.
 b. Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
 c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Soit P le plan d'équation : $x - y + z - 4 = 0$.
 a. Montrer que les plans (ABC) et P sont sécants.
 b. Soit D la droite intersection des plans P et (ABC). Déterminer une représentation paramétrique de la droite D .
3. On considère la sphère S de centre $\Omega(3 ; 1 ; 3)$ et de rayon 3 et on nomme I le point de coordonnées $(2 ; -1 ; 1)$. On admet que la droite D a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- a. Montrer que le point I appartient à la droite D .
- b. Montrer que le point I appartient à la sphère S .
- c. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
 Montrer que la droite D coupe la sphère S en un deuxième point.

EXERCICE 2**5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère l'ensemble P des points $M(x ; y ; z)$ de l'espace tels que :

$$z = x^2 + y^2.$$

Les trois questions sont indépendantes.

1. a. Montrer que l'intersection de l'ensemble P et du plan d'équation $z = 5$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
 b. Déterminer la nature de l'intersection de l'ensemble P et du plan d'équation $y = 1$.
2. On considère la sphère S de centre O et de rayon $\sqrt{6}$.
 a. Donner une équation de la sphère S .
 b. Montrer que l'intersection de la sphère S et de l'ensemble P est un cercle.
3. Le but de cette question est de déterminer les points $M(x ; y ; z)$ de l'ensemble P , dont les coordonnées sont des entiers relatifs, appartenant au plan d'équation $-3x + 2y = 1$ et vérifiant $z \leq 25$.
 a. Donner un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E) : $-3x + 2y = 1$.

- b. Déterminer l'ensemble des couples $(x; y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E). Déterminer les points de l'ensemble P dont les coordonnées $(x; y; z)$ sont des entiers relatifs vérifiant :

$$-3x + 2y = 1 \quad \text{et} \quad z \leq 25.$$

EXERCICE 3**5 points****Commun à tous les candidats**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité graphique 4 cm.

Partie A :

On note P le point d'affixe $p = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, Q le point d'affixe $q = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, et K le point d'affixe -1 .

1. a. Montrer que les points P et Q appartiennent au cercle Γ de centre O et de rayon 1.
b. Faire une figure et construire les points P et Q.
2. a. Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z tels que $|z| = |z + 1|$. Représenter cet ensemble sur la figure.
b. Montrer que P et Q sont les points d'intersection de l'ensemble D et du cercle Γ .

Partie B :

On considère trois nombres complexes non nuls a, b et c . On note A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c .

On suppose que l'origine O du repère (O, \vec{u}, \vec{v}) est à la fois le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit du triangle ABC.

1. a. Montrer que $|a| = |b| = |c|$. En déduire que $\left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{c}{a}\right| = 1$.
b. Montrer que $a + b + c = 0$.
c. Montrer que $\left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{b}{a} + 1\right| = 1$.
d. En utilisant la partie A, en déduire que $\frac{b}{a} = p$ ou $\frac{b}{a} = q$.
2. Dans cette question, on admet que $\frac{b}{a} = p$ et $\frac{c}{a} = q$.
a. Montrer que $\frac{q-1}{p-1} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
b. Montrer que $\frac{q-1}{p-1} = \frac{c-a}{b-a}$.
c. Déduire des deux questions précédentes la nature du triangle ABC.

EXERCICE 4**5 points****Commun à tous les candidats**

Les parties A et B sont indépendantes

Un site internet propose des jeux en ligne.

Partie A :

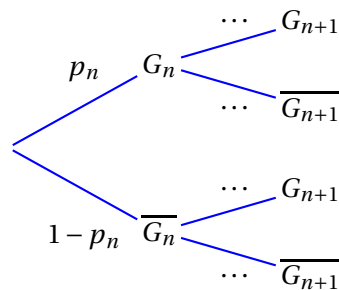
Pour un premier jeu :

- si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est égale à $\frac{2}{5}$.
- si l'internaute perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est égale à $\frac{4}{5}$.

Pour tout entier naturel non nul n , on désigne par G_n l'évènement « l'internaute gagne la n -ième partie » et on note p_n la probabilité de l'évènement G_n .

L'internaute gagne toujours la première partie et donc $p_1 = 1$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$.
3. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $u_n = p_n - \frac{1}{4}$.
- Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme u_1 à préciser.
 - Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$.
 - Déterminer la limite de p_n .

Partie B :

Dans un second jeu, le joueur doit effectuer 10 parties.

On suppose que toutes les parties sont indépendantes.

La probabilité de gagner chaque partie est égale à $\frac{1}{4}$.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.

- Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.
 - Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une partie? Le résultat sera arrondi à 10^{-2} près.
 - Déterminer l'espérance de X .

2. Le joueur doit payer 30 € pour jouer les 10 parties. Chaque partie gagnée lui rapporte 8 €.
- a. Expliquer pourquoi ce jeu est désavantageux pour le joueur.
 - b. Calculer la probabilité pour un joueur de réaliser un bénéfice supérieur à 40 €. Le résultat sera arrondi à 10^{-5} près.

ANNEXE

Commun à tous les candidats

À rendre avec la copie

Exercice 1

