

∞ Baccalauréat S Antilles-Guyane septembre 2005 ∞

EXERCICE 1

5 points

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$.

1.
 - a. Démontrer que pour tout $n \geq 3, u_n \geq 0$.
 - b. En déduire que pour tout $n \geq 4, u_n \geq n - 2$.
 - c. En déduire la limite de la suite (u_n) .
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = 4u_n - 8n + 24$.
 - a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique décroissante dont on donnera la raison et le premier terme.
 - b. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$.
 - c. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = x_n + y_n$ où (x_n) est une suite géométrique et (y_n) une suite arithmétique dont on précisera pour chacune le premier terme et la raison.
 - d. En déduire l'expression de $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ en fonction de n .

EXERCICE 2

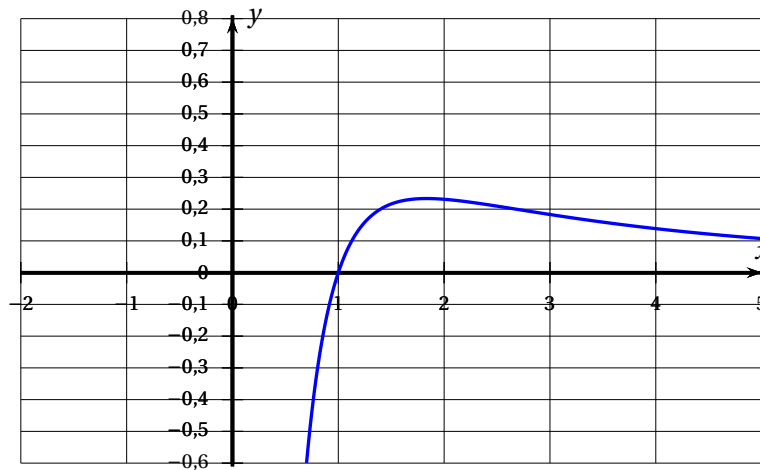
4 points

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 + x}.$$

1. Montrer que pour tout $x > 1, \frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$.
2.
 - a. Calculer $I = \int_2^4 \frac{\ln x}{x} dx$ et $J = \int_2^4 \frac{\ln x}{x^2} dx$ (on pourra utiliser une intégration par parties pour cette dernière).
 - b. En déduire un encadrement de $K = \int_2^4 f(x) dx$.
3. La figure ci-dessous représente la courbe représentative de f (unités graphiques : en abscisse 1 cm pour 1 unité, en ordonnées 4 cm pour 1 unité). On considère l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que :

$$\begin{cases} 2 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases} \quad \text{et on note } \mathcal{A} \text{ son aire.}$$



À l'aide de l'encadrement trouvé au 2 b, donner un encadrement de \mathcal{A} en cm^2 .

EXERCICE 3

4 points

Soit \mathcal{P} le plan complexe rapporté au repère (O, \vec{u}, \vec{v}) (unité graphique : 4 cm). Soit A le point d'affixe 1. On note f l'application de \mathcal{P} privé de A dans \mathcal{P} qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{1}{z-1}.$$

1. a. Soit B le point d'affixe $b = 4 + i\sqrt{3}$. Déterminer la forme algébrique et la forme exponentielle de l'affixe b' de B' .
 b. Déterminer les affixes des points ayant pour image par f leur symétrique par rapport à O.
2. a. Exprimer $|z'|$ et $\arg(z')$ en fonction de $|z-1|$ et $\arg(z-1)$.
 b. Soit \mathcal{C} le cercle de centre A et de rayon r . On suppose que M est un point de \mathcal{C} . Déterminer $|z'|$.
 En déduire que M' appartient à un cercle \mathcal{C}' dont on précisera le centre et le rayon.
 c. Placer un point M quelconque sur le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{2}$ et construire son image M' . (On laissera les traits de construction,)

EXERCICE 4

4 points

On modélise le temps d'attente entre deux clients à un guichet comme une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ . La probabilité pour un client d'attendre moins de t min est définie par :

$$p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Le temps moyen d'attente est donné par :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx.$$

1. a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx$ en fonction de t .
b. En déduire que le temps moyen est $\frac{1}{\lambda}$.
2. Le temps moyen d'attente étant de 5 min, quelle est la probabilité d'attendre plus de 10 min? plus de 5 min?
3. Quelle est la probabilité d'attendre encore au moins 5 min, sachant qu'on a déjà attendu 10 min? Comment expliquez-vous ce résultat?

EXERCICE 5**4 points**

Pour cet exercice, vous recopierez pour chaque question, votre réponse.

Chaque réponse juste rapporte 1 point. Une absence de réponse n'est pas sanctionnée. Il sera retiré 0,5 point par réponse fausse.

La note finale de l'exercice ne pourra pas être inférieure à zéro.

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal.

1. La droite passant par A(1 ; 2 ; -4) et B(-3 ; 4 ; 1) et la droite représentée par

$$\begin{cases} x = -11 - 4t \\ y = 8 + 2t \\ z = 11 + 5t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \text{ sont :}$$

- sécantes strictement parallèles confondues non coplanaires

2. Soient le plan \mathcal{P} d'équation $2x + 3y - z + 4 = 0$ et la droite \mathcal{D} représentée par

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 8 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- \mathcal{P} et \mathcal{D} sont sécants. \mathcal{P} et \mathcal{D} sont strictement parallèles.
 \mathcal{D} est incluse dans \mathcal{P} . Aucune de ces possibilités n'est vraie.

3. La distance du point A(1 ; 2 ; -4) au plan d'équation $2x + 3y - z + 4 = 0$ est :

$\frac{8\sqrt{14}}{7}$ 16 $8\sqrt{14}$ $\frac{8}{7}$

4. Soient le point B(-3 ; 4 ; 1) et la sphère \mathcal{S} d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 16$;

- B est à l'intérieur de \mathcal{S} B est à l'extérieur de \mathcal{S}
 B est sur \mathcal{S} On ne sait pas.