∽ Baccalauréat mathématiques élémentaires ∾
Antilles–Guyane juin 1963

EXERCICE 1

1. Soit un repère orthonormé $x\text{O}y$. Étudier les variations et tracer le graphique (C) de la fonction

$$y = x + \frac{4}{x^2}.$$

2. Calculer l'aire, S_a, du trapèze curviligne compris entre la courbe (C), son asymptote oblique (D) et les parallèles à Oy d'abscisses 2 et a (nombre donné positif).
3. L'aire S_a a-t-elle une limite quand a tend vers $+\infty$; quand a tend vers O ?

EXERCICE 2

Résoudre l'inéquation

$$\log_2 x > \log_8 (3x - 2).$$

(On rappelle que, si $\log_a x$ représente le logarithme de base a de x et si Log x représente le logarithme népérien de x, on a

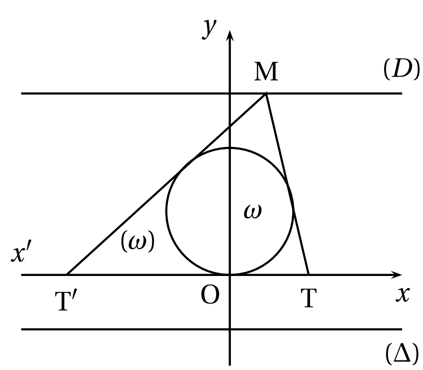
$$\log_a x = \frac{\text{Log}\, x}{\text{Log}\, a}.$$

EXERCICE 2

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $x\text{O}y$, on considère le cercle (ω) de centre $\omega(O\,;\ a)$, de rayon a, et la droite (D) d'équation $y = 3a$ (a est une longueur donnée).
Soit un point M variable de la droite (D) et un point T variable de $x'x$.
On désigne par m l'abscisse de M, par t l'abscisse de T.

1. Montrer que l'équation de la droite MT est

$$(1) \qquad 3ax - (m - t)y - 3at = 0.$$



2. Montrer que la droite MT est tangente au cercle (ω) si, et seulement si,

$$(2) \qquad t^2 + 2mt - 3a^2 = 0.$$

Dans toute la suite on supposera que cette relation (2) est vérifiée.

On observera que, quand $\text{M}(m\ ;\ 3a)$ est donné, les abscisses des points, T et T$'$, où les tangentes issues de M coupent $(x'x)$ sont les racines de l'équation (2).

3. À chaque point T de $x'x$, distinct de O, on associe le point M où la tangente issue de T à (ω), autre que TO, coupe (D).

Montrer géométriquement que la correspondance entre les points T et les points M est une *application* de la droite $x'x$ (moins le point O) sur la droite D.

Cette application est-elle biunivoque ?

Retrouver ces résultats à l'aide de l'équation (2).

4. Soit I le milieu de TT$'$ et soit K le point où la médiatrice de TT$'$ coupe Mω. Montrer que $\overline{\text{OI}} = -m$.

Montrer que le point K appartient à la fois à la droite (Δ) d'équation $y = -a$ et au cercle (C) circonscrit au triangle MTT$'$.

5. Montrer que $\overline{\text{OT}} \cdot \overline{\text{OT}'} = -3a^2$ [on pourra utiliser l'équation (2)].

Quels sont, dans l'inversion de centre O et de puissance $-3a^2$, les transformés du cercle (C) et de la droite (Δ) ?