∽ Baccalauréat C Asie [1] juin 1990 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

On prend six cartons identiques. Sur chaque carton on écrit une, et et une seule, des six lettres du mot FRANCE; chacune des lettres de ce mot est utilisée. On place ces cartons dans une urne. On les en extrait au hasard un à un, chaque carton ayant la même probabilité d'être tiré, et on note les lettres obtenues dans l'ordre de leur apparition.

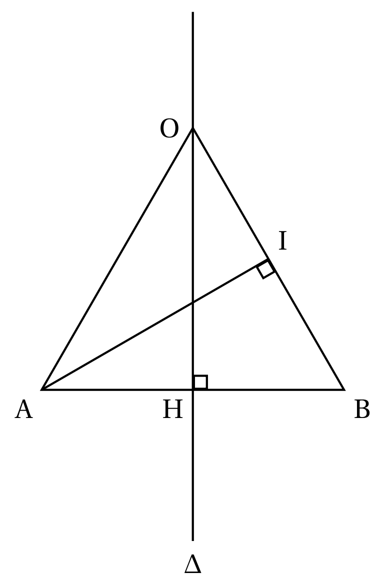
1. Calculer, dans l'hypothèse où ces six tirages se font sans remise, les probabilités des évènements suivants.

  a. On obtient les lettres du mot FRANCE dans l'ordre.

  b. On obtient dans l'ordre de leur apparition, les trois premières lettres FRA du mot FRANCE et les trois autres lettres dans le désordre.

2. Reprendre les questions ci-dessus lorsque les six tirages s'effectuent en remettant à chaque fois dans l'urne le carton obtenu.

EXERCICE 2 **5 POINTS**



Soit ABO un triangle équilatéral du plan orienté tel que $\left(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$ (à 2π près).
On note H le milieu de [AB], I celui de [OB] et Δ la médiatrice de [AB].
On note s la similitude plane directe de centre O transformant le point A en I. M désigne un point quelconque du plan et M' son image par s.

1. **a.** Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe s.

  b. Construire le point C du plan tel que $s(\text{C}) = \text{A}$. On justifiera soigneusement cette construction.

1. Japon, Hong-Kong, Singapour

c. Exprimer AM' en fonction de CM.

2. On note M'' l'image du point M par la réflexion d'axe Δ. On se propose de déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que A soit équidistant de M' et M''.

a. Montrer que AM'' = BM.

b. Montrer que M appartient à (Γ) si, et seulement si, CM = 2BM.

c. Déterminer la nature de (Γ), puis construire (Γ).

PROBLÈME **11 POINTS**

1. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \exp\left(-x^2\right), \quad \text{c'est-à-dire } f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

a. Étudier f (parité, sens de variation, limites).

b. On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$. Tracer la portion de $(\mathscr{C})$ délimitée par ses points d'abscisses -2 et 3.

2. On se propose dans cette partie d'étudier l'équation (E) : $f(x) = x$.

a. Montrer que (E) ne peut avoir de solution négative.

A l'aide de l'étude des variations de la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = f(x) - x$$

montrer que l'équation (E) admet une unique solution α, puis que α appartient à l'intervalle I = [0,5 ; 0,8].

b. Préciser le sens de variation de la fonction f' (dérivée de f) sur l'intervalle I. En déduire que pour tout x élément de I on a :

$$\left|f'(x)\right| \leqslant \left|f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right| \quad \text{puis que} \quad |f'(x)| \leqslant 0,9.$$

c. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0,5 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{array}\right. \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

i. Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à I.

ii. Montrer, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que pour tout entier naturel n :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0,9\,|u_n - \alpha|.$$

En déduire que, pour tout entier naturel n :

$$|u_n - \alpha| \leqslant 0,3 \times (0,9)^n.$$

Quelle est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3. Dans cette partie, on se propose d'étudier la fonction numérique F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F: \quad x \longmapsto F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire la primitive de f s'annulant au point $x = 0$.

On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.

a. Étudier le sens de variation de F.

b. Interpréter géométriquement $F(x)$ pour x positif puis pour x négatif. En déduire que F est impaire.

c. i. Vérifier que pour tout t supérieur ou égal à 2 on a :

$$\mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-2t}.$$

En déduire que, pour tout x supérieur ou égal à 2, on a :

$$F(x) - F(2) \leqslant \int_2^x \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t.$$

ii. Calculer $\displaystyle\int_2^x \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$.

En déduire que, pour $x \geqslant 2$: $F(x) - F(2) \leqslant \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-4}$, puis que F est majorée sur $\mathbb{R}$.

iii. On admet que F a une limite ℓ en $+\infty$. Montrer que :

$$0 \leqslant \ell - F(2) \leqslant 10^{-2}.$$

iv. On considère les points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 de la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de f définie au 1., d'abscisses respectives 0, $\dfrac{1}{2}$, 1, $\dfrac{3}{2}$ et 2.

Calculer à l'aide de la calculatrice l'aire de la partie du plan délimitée par la ligne polygonale $A_0A_1A_2A_3A_4$ l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$. Ce nombre est une valeur approchée de ℓ dont on ne demande pas la précision.

d. En rassemblant les résultats précédents, donner l'allure de la courbe représentative de F.