

## ☞ Baccalauréat C Asie<sup>1</sup> juin 1984 ☞

### EXERCICE 1

4 POINTS

Le plan complexe  $P$  est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  d'axes  $(x'x)$  et  $(y'y)$ .  $A$  est le point d'affixe  $2i$ .

$f$  est l'application de  $P - \{A\}$  dans lui-même qui à tout point  $M$  d'affixe  $Z$  associe le point  $M'$  d'affixe

$$Z' = \frac{2iZ - 5}{Z - 2i}.$$

1. Montrer qu'il existe deux points  $B$  et  $C$  invariants par  $f$ .
2. Montrer que  $f$  est bijective et déterminer son application réciproque.
3. Montrer que la droite  $(y'y)$  privée du point  $A$  est globalement invariante par  $f$ .
4. Montrer que si  $Z \neq 2i$ ,  $|Z' - 2i| \cdot |Z - 2i| = 9$ .  
En déduire l'image par  $f$  du cercle  $\Gamma$  de centre  $A$  et de rayon  $r$ .  
Déterminer  $r$  pour que  $\Gamma$  soit invariant par  $f$ .

### EXERCICE 2

4 POINTS

$A, B, C$  et  $D$  sont quatre points non coplanaires de l'espace.  $I$  et  $J$  sont les milieux respectifs des segments  $[AB]$  et  $[CD]$ .

$m$  étant un réel non nul,  $G_m$  est le barycentre des quatre points  $A, B, C$  et  $D$  affectés respectivement des coefficients  $1; 1; m-2$  et  $m$ .

1. On construit  $G_m$  dans deux cas particuliers.
  - a. Construire  $G_2$  ( $m = 2$ ).
  - b. Construire  $G_1$  ( $m = 1$ ).
  - c. En déduire que  $G_2$  est le milieu du segment  $[G_1J]$ .
2. Montrer que

$$\vec{IG}_m = \frac{(m-2)\vec{IC} + m\vec{ID}}{2m}.$$

En déduire que l'ensemble  $S$  des points  $G_m$ , lorsque  $m$  décrit  $\mathbb{R}$ , est inclus dans un plan que l'on précisera.

3. Montrer que  $m\vec{JG}_m$  est un vecteur constant. En déduire l'ensemble  $S$ .

### PROBLÈME

12 POINTS

#### Partie A

- 
1. Australie, Hong-Kong, Japon

Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  telle que

$$f(x) = x - 1 - \ln|x|,$$

où  $\ln$  est le logarithme népérien.

On note  $f_0$  et  $f_1$  les restrictions de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\mathbb{R}_-^*$  respectivement.

On note  $\gamma$ ,  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  leurs courbes représentatives respectives dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  orthonormé.

1. a. Pour chaque réel  $k$ , on considère la droite  $D_k$  d'équation  $y = x + k$ .  
Montrer que  $D_k$  coupe  $\gamma$  en deux points d'abscisses opposées.  
En déduire que  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  s'échangent dans une symétrie  $S$  que l'on précisera.
- b. On considère deux points  $P$  et  $Q$  sur  $\gamma$ , d'abscisses respectives  $x$  et  $\frac{1}{x}$ , puis leur milieu  $I$ .  
Montrer que  $I$  est situé sur une des droites  $D_k$  que l'on précisera.
- c. Étudier les variations de  $f$  et construire  $\gamma$ .
2. a. Démontrer que  $f_1$  est une bijection de  $\mathbb{R}_-^*$  vers  $\mathbb{R}$ . En déduire que  $f_1$  possède un unique zéro noté ici  $x_1$ .
- b. Calculer  $\ln|x_1|$  en fonction de  $x_1$ .  
Donner une valeur approchée de  $x_1$  à  $\frac{1}{10}$  près.
- c. La courbe représentative de  $f_1^{-1}$  dans  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  s'obtient à partir de  $\gamma_0$  par la transformation ponctuelle  $T$  composée de la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées parallèlement à  $D_0$ , et d'une autre symétrie  $S'$  que l'on précisera.  
Montrer que les expressions analytiques de  $T$  sont

$$x' = y - 2x \quad \text{et} \quad y' = -x.$$

3. a. On considère la fonction  $\varphi$  de  $\mathbb{R}_+^*$  vers  $\mathbb{R}$  telle que

$$\varphi(x) = x \ln x.$$

Déterminer  $\varphi'$ , dérivée de  $\varphi$ .

- b. En déduire une primitive de  $f_0$ .
- c. Le plan étant rapporté au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , évaluer l'aire de la partie du plan définie par

$$\begin{cases} \frac{1}{e} \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq f(x). \end{cases}$$

### Partie B

Soit  $g$  la fonction numérique définie par

$$\begin{cases} g(x) = \frac{x \ln|x|}{x-1}, & \forall x \in \mathbb{R} - \{0; 1\}, \\ g(0) = 0 \\ g(1) = 1 \end{cases}$$

1. La fonction  $g$  est-elle continue en 0? Est-elle continue en 1?
2.
  - a. La fonction  $g$  est-elle dérivable en 0?
  - b. La fonction  $g$  est-elle dérivable en 1? (on utilisera un développement limité en 0, d'ordre 2, de  $\ln(1+h)$ ).
  - c. À l'aide du signe de  $f$  (partie A), étudier les variations de la fonction  $g$ .
3.
  - a. On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $g$  et E le point de  $\mathcal{C}$  d'abscisse  $(-1)$ . Déterminer une équation de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point E.
  - b. Préciser la position relative de cette tangente et de la courbe  $\mathcal{C}$  au voisinage du point E. (On pourra poser  $x = -1 - h$  et utiliser un développement limité, au voisinage de 0, de  $\ln(1+h)$ ).
  - c. Construire la courbe  $\mathcal{C}$ .