

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Asie juin 1991 ∞

EXERCICE 1

4 points

Soit l'équation différentielle :

$$y'' + 4y = 0. \quad (E)$$

1. Déterminer les solutions f et g de l'équation (E), telles que :

$$\begin{aligned} f(0) = 5 & \quad \text{et} \quad f'(0) = 0 \\ g(0) = 0 & \quad \text{et} \quad g'(0) = 8. \end{aligned}$$

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on désigne par (C) la courbe d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

où le réel t décrit \mathbb{R} .

Quelle est la nature de la courbe (C) ?

La construire après avoir précisé ses éléments caractéristiques : sommets, foyers, excentricité.

EXERCICE 2

4 points

L'unité est le cm.

On donne dans le plan, un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 8$ et $AC = 4$.

1. Construire le barycentre G des points A, B, C respectivement affectés des coefficients 3, -1 et 2.
2. Déterminer et construire l'ensemble E des points M du plan vérifiant :

$$3MA^2 - MB^2 + 2MC^2 = -32.$$

3. Déterminer et construire l'ensemble F des points M du plan vérifiant :

$$\|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$$

PROBLÈME

12 points

I- Étude d'une fonction numérique. Tracé de courbes

Soit f la fonction numérique définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \ln(1 + x).$$

On appelle (\mathcal{C}) la courbe représentative de f , le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique : 3 cm.

1.
 - a. Étudier le sens de variation de f .
 - b. Donner une équation de la tangente (\mathcal{D}) à la courbe (\mathcal{C}) en son point d'abscisse 0.
 - c. Tracer la courbe (\mathcal{C}) et la tangente (\mathcal{D}) .
2. En étudiant la fonction numérique g définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x - f(x)$$

montrer que l'équation $f(x) = x$ a une solution unique α , et que α appartient à l'intervalle $[1; 3]$.

II- Résolution approchée d'une équation. Calcul d'aire

1. On définit la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = f(u_n),$$

où f est la fonction définie dans la partie I.

Démontrer les résultats suivants :

- a. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et croissante;
- b. pour tout entier naturel n , $u_n \geq 1$;
- c. pour tout x de l'intervalle $[1; +\infty[$, on a $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$;
- d. pour tout entier naturel n , on a :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

(α est le réel défini à la question I. 2.);

Pour tout entier n , on a :

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

- e. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α ;
 - f. u_{11} est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
2. Donner, à l'aide d'une calculatrice, une valeur approchée β de u_{11} à 10^{-3} .
 3. Calculer, l'aire en cm^2 de l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \alpha \\ 0 \leq y \leq f(x). \end{cases}$$

(On utilisera vu une intégration par parties.)

On donnera pour cette aire la valeur exacte en faisant intervenir α , puis une valeur approchée obtenue en remplaçant α par le nombre β trouvé en II. 2.

III- Étude d'une famille de courbes et d'une suite de réels

Pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 1, on considère la fonction f_p définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f_p : x \longmapsto f_p(x) = 1 + \ln(x + p).$$

On appelle (\mathcal{C}_p) la courbe représentative de f_p .

1. Dresser le tableau de variations de f_p .
Étudier les positions relatives de (\mathcal{C}_p) et (\mathcal{C}_{p+1}) .
2. Le graphique ci-dessous, à rendre avec la copie, représente les courbes (\mathcal{C}_2) , (\mathcal{C}_3) , (\mathcal{C}_{10}) , (\mathcal{C}_{20}) et (\mathcal{C}_{50}) . Le compléter par le tracé de (\mathcal{C}_1) et celui de la droite (Δ) d'équation cartésienne $y = x$.
3. Étudier pour tout entier p supérieur ou égal à 1, le sens de variation de la fonction g_p définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g_p : x \longmapsto g_p(x) = x - f_p(x).$$

Déduire de cette étude l'existence d'une solution unique α_p pour l'équation $x = f_p(x)$, et le signe de g_p .

4. On désigne par P le point de (\mathcal{C}_1) d'abscisse α_1 , par Q le point de (\mathcal{C}_2) d'abscisse α_1 , par R le point de (\mathcal{C}_1) d'abscisse α_2 .
Placer ces points sur le graphique complété à la question III. 2.
Comparer les ordonnées de P et Q.
Quel est le signe de $g_2(\alpha_1)$? En déduire, en utilisant III. 3, que $\alpha_1 \leq \alpha_2$.
Prouver de la même manière la croissance de la suite $(\alpha_p)_{p \geq 1}$.
5. Établir l'inégalité $\alpha_p \geq 1 + \ln p$.
Quelle est la limite de la suite $(\alpha_p)_{p \geq 1}$?

Document réponse à compléter et à remettre avec la copie

