

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Asie¹ juin 1972 ∞

EXERCICE 1

Trouver le PGCD des nombres 1 683 et 969.

En déduire tous les couples $(x ; y)$ d'entiers relatifs, solutions des équations suivantes :

1. $969x - 1683y = 51$ [on vérifiera que le couple $(7 ; 4)$ est une solution];
2. $969x - 1683y = 102$;
3. $969x - 1683y = 84$.

EXERCICE 2

Calculer, par la méthode d'intégration par parties, l'intégrale

$$\int_0^x t^2 \sin t \, dt.$$

PROBLÈME

On considère un espace vectoriel, V_2 , de dimension 2, de base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) et un espace affine associé (E_2) dont $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère.

1. Soit $f_{a, c}$ l'application affine de (E_2) vers (E_2) , qui, au point M de coordonnées $(x ; y)$, fait correspondre le point M' de coordonnées $(x' ; y')$, telles que

$$\begin{cases} x' &= x - y + c, \\ y' &= ax - y + 2c, \end{cases}$$

où a et c sont des nombres réels donnés.

- a. Pour quelles valeurs de a l'application $f_{a, c}$ est-elle une bijection ?
 - b. Déterminer, suivant les valeurs de a et de c , l'ensemble des points invariants par $f_{a, c}$.
 - c. Expliciter l'application composée $f_{a, c} \circ f_{a, c}$ et reconnaître sa nature géométrique suivant les valeurs de a et de c .
2. On étudie l'application $f = f_{0, -2}$ c'est-à-dire l'application de (E_2) vers (E_2) définie par

$$\begin{cases} x' &= x - y - 2, \\ y' &= -y - 4. \end{cases}$$

- a. Démontrer que f est involutive et la caractériser géométriquement.
- b. Quelle est la figure transformée d'une droite de (E_2) ? Quelles sont les droites globalement invariantes ?

1. Cambodge, Laos et Japon

- c. Trouver l'équation cartésienne de la figure (C') transformée du cercle (C) de centre $(-2, -4)$ et de rayon 212.
3. a. Étudier les variations de la fonction, g, de la variable réelle x, telle que

$$g(x) = \frac{1}{2} \left(x + \sqrt{16 - x^2} \right).$$

- b. Tracer sa courbe représentative, (Γ), dans (E_2) rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- c. Montrer que (Γ) est une partie de (C'). Par quelle transformation simple la partie complémentaire de (Γ) dans (C') se déduit-elle de (Γ)?